Exercice 1 : Diviseurs et Nombres premiers

1. **Diviseurs de 18 :** On cherche les multiplications donnant 18 : 1×18, 2×9, 3×6. L'ensemble des diviseurs de 18 est :
$$\mathcal{D}_{18} = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,6\,;\,9\,;\,18\}$$

2. **Le nombre 47 est-il premier ?** On teste la divisibilité de 47 par les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{47}$. On sait que $\sqrt{36} < \sqrt{47} < \sqrt{49}$, donc $\sqrt{47} \approx 6,8$. Il faut tester les nombres premiers : 2, 3 et 5.
   - 47 n'est pas pair (ne finit pas par 0, 2, 4, 6, 8), donc non divisible par 2.
   - Somme des chiffres : $4 + 7 = 11$, non divisible par 3.
   - Ne finit pas par 0 ou 5, donc non divisible par 5.

   Conclusion : 47 n'a pas de diviseurs autres que 1 et lui-même, il est **premier**.

3. **Les nombres suivants sont-ils premiers ?**
   a) **867 :** On calcule la somme des chiffres : $8 + 6 + 7 = 21$. 21 est un multiple de 3, donc 867 est divisible par 3.
   $$867 = 3 \times 289$$
   Il admet un diviseur autre que 1 et lui-même. **Il n'est pas premier.**

   b) **691 :** On teste les nombres premiers jusqu'à $\sqrt{691} \approx 26,2$. On doit tester : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.
   - Critères évidents (2, 3, 5) : non divisibles.
   - $691 = 7 \times 98 + 5$ (non)
   - $691 = 11 \times 62 + 9$ (non)
   - $691 = 13 \times 53 + 2$ (non)
   - $691 = 17 \times 40 + 11$ (non)
   - $691 = 19 \times 36 + 7$ (non)
   - $691 = 23 \times 30 + 1$ (non)

   Aucun nombre premier inférieur à sa racine carrée ne divise 691. **Le nombre 691 est premier.**

4. **Décomposition en facteurs premiers :**
   - $\mathbf{150} = 15 \times 10 = (3 \times 5) \times (2 \times 5) = \boxed{2 \times 3 \times 5^2}$
   - $\mathbf{72} = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2 = \boxed{2^3 \times 3^2}$
   - $\mathbf{400} = 4 \times 100 = 2^2 \times 10^2 = 2^2 \times (2 \times 5)^2 = 2^2 \times 2^2 \times 5^2 = \boxed{2^4 \times 5^2}$

Exercice 2 : Division euclidienne et calcul littéral

1. **Division euclidienne de 484 par 3 :** On pose la division :

$$\begin{aligned}484 &= 300 + 180 + 4\\ 484 &= 3 \times 100 + 3 \times 60 + (3 \times 1 + 1)\\ 484 &= 3 \times (100 + 60 + 1) + 1\\ 484 &= 3 \times 161 + 1\end{aligned}$$

   Le quotient est 161 et le reste est 1.

$$\boxed{484 = 3 \times 161 + 1}$$

2. **Étude de $a = 8k$ et $b = 6k$:**

   a) **a est pair :** $a = 8k = 2 \times (4k)$. Comme k est entier, $4k$ est entier. a s'écrit sous la forme $2 \times$ Entier, donc a est pair.

   b) **b est multiple de 3 :** $b = 6k = 3 \times (2k)$. Comme $2k$ est entier, b est un multiple de 3.

   c) **$a + b$ multiple de 7 ?** Calculons la somme :

$$a + b = 8k + 6k = 14k$$

   On peut factoriser par 7 :

$$a + b = 7 \times (2k)$$

   Comme $2k$ est un entier relatif, $a + b$ est bien un multiple de 7. **La réponse est OUI.**

Exercice 3 : Démonstrations

1. **Somme de deux multiples de 11 :** Soient n et m deux multiples de 11. Il existe deux entiers k et k' tels que $n = 11k$ et $m = 11k'$. Leur somme est :

$$S = n + m = 11k + 11k' = 11(k + k')$$

   Comme $k + k'$ est un entier, S est un multiple de 11.

2. **Produit de deux nombres pairs :** Soient n et m deux nombres pairs. Il existe k et p entiers tels que $n = 2k$ et $m = 2p$. Leur produit est :

$$P = n \times m = (2k) \times (2p) = 4kp$$

   kp étant un entier, P est un multiple de 4.

Exercice 4 : Contre-exemples

1. « Le produit de deux entiers impairs consécutifs est pair. »
Contre-exemple : Prenons les entiers impairs consécutifs 3 et 5.

$$3 \times 5 = 15$$

15 est impair. L'affirmation est donc fausse.

2. « Le produit d'un nombre décimal par 10 est un nombre entier. »
Contre-exemple : Prenons le nombre décimal $1,25$.

$$1,25 \times 10 = 12,5$$

$12,5$ n'est pas un entier. L'affirmation est donc fausse.

Exercice 5 : Problème

On étudie l'affirmation : « Si $n > 1$, $n^4 + 4$ n'est pas premier ».

1. **Vérification pour des petites valeurs :**
   - Pour $n = 2 : 2^4 + 4 = 16 + 4 = 20$. Divisible par 2, 5, etc. **Pas premier**.
   - Pour $n = 3 : 3^4 + 4 = 81 + 4 = 85$. Finit par 5, divisible par 5. **Pas premier**.
   - Pour $n = 4 : 4^4 + 4 = 256 + 4 = 260$. Pair, divisible par 10. **Pas premier**.

2. **Démonstration de l'égalité :** Développons le membre de droite : $(n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$. On peut utiliser l'identité remarquable $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ en posant $A = n^2 + 2$ et $B = 2n$.

$$\begin{aligned}(n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2) &= [(n^2 + 2) + 2n] \times [(n^2 + 2) - 2n] \\ &= (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 \\ &= (n^4 + 4n^2 + 4) - 4n^2 \\ &= n^4 + 4\end{aligned}$$

L'égalité est vérifiée.

3. **Pourquoi l'élève a raison :** On a factorisé $n^4 + 4$ en un produit de deux nombres entiers : $A = n^2 + 2n + 2$ et $B = n^2 - 2n + 2$. Pour que $n^4 + 4$ ne soit pas premier, il suffit que ce produit ne soit pas trivial (c'est-à-dire qu'aucun des facteurs ne vaille 1).

   Étudions le plus petit facteur : $B = n^2 - 2n + 2 = (n - 1)^2 + 1$. Puisque l'énoncé précise $n > 1$, alors $n \geq 2$, donc $n - 1 \geq 1$. Ainsi $(n - 1)^2 + 1 \geq 1^2 + 1 = 2$.

   Les deux facteurs sont donc supérieurs ou égaux à 2. Le nombre n^4+4 admet donc des diviseurs autres que 1 et lui-même. Il est composé (non premier).

4. **Le cas du nombre 1300 :** *Méthode simple :* 1300 est un nombre pair (finit par 0), donc divisible par 2. Il finit par 0, donc divisible par 5 et 10. Il n'est donc pas premier. Deux diviseurs (autres que 1 et 1300) : **2 et 5**.

   Lien avec l'exercice (Méthode experte) : On remarque que $1\,300 = 1\,296 + 4$. Or $1\,296 = 36^2 = (6^2)^2 = 6^4$. Donc $1\,300 = 6^4 + 4$. D'après la formule prouvée en question 2 (avec $n = 6$) :

$$\begin{aligned}
1300 &= (6^2 + 2 \times 6 + 2)(6^2 - 2 \times 6 + 2) \\
1300 &= (36 + 12 + 2)(36 - 12 + 2) \\
1300 &= 50 \times 26
\end{aligned}$$

   On retrouve bien que 1300 n'est pas premier, car divisible par 26 et 50.