Exercice 1 : Vrai ou Faux

1. **132 est un multiple de :**
   - **a) 4 : VRAI**. On effectue la division : $132 = 4 \times 33$. Le reste est nul.
   - **b) 3 : VRAI**. La somme des chiffres est $1 + 3 + 2 = 6$, qui est divisible par 3.
   - **c) 9 : FAUX**. La somme des chiffres est 6, qui n'est pas divisible par 9.
   - **d) 132 : VRAI**. Tout nombre non nul est multiple de lui-même ($132 = 132 \times 1$).
   - **e) 0 : FAUX**. Un nombre non nul ne peut pas être un multiple de 0 (le seul multiple de 0 est 0).

2. **6 est un diviseur de :**
   - **a) 6 : VRAI**. Car $6 = 6 \times 1$.
   - **b) 1 : FAUX**. Un diviseur doit être inférieur ou égal au nombre (pour les entiers naturels non nuls). Ici $6 > 1$.
   - **c) 18 : VRAI**. Car $18 = 6 \times 3$.
   - **d) 56 : FAUX**. $56 = 6 \times 9 + 2$. La division euclidienne n'est pas exacte.

3. **Lorsque j'ajoute deux multiples de 9, j'obtiens :** Soient $n = 9k$ et $m = 9k'$ deux multiples de 9 (avec k, k' entiers). La somme est $S = 9k + 9k' = 9(k + k')$.
   - **a) Un multiple de 81 : FAUX**. Contre-exemple : $9 + 9 = 18$, et 18 n'est pas multiple de 81.
   - **b) Un multiple de 18 : FAUX**. Contre-exemple : $9 + 18 = 27$, qui n'est pas pair, donc pas multiple de 18.
   - **c) Un diviseur de 9 : FAUX**. La somme est généralement plus grande que 9.
   - **d) Un multiple de 9 : VRAI**. Comme démontré par $9(k + k')$.

4. **Le nombre $N = 1\,234\,567\,891\,234\,567\,890$ est divisible par :**
   - **a) 2 : VRAI**. Il se termine par 0 (pair).
   - **b) 3 : VRAI**. Calculons la somme des chiffres. On remarque la séquence $1+2+\cdots+9 = 45$. Le nombre est composé de cette séquence, suivie d'un 1, suivie de la séquence de 2 à 9 et d'un 0. Plus simplement, sommons tout : $S = (1+2+3+4+5+6+7+8+9)+1+(2+3+4+5+6+7+8+9+0) = 45+1+44 = 90$. 90 est divisible par 3.
   - **c) 5 : VRAI**. Il se termine par 0.
   - **d) 9 : VRAI**. La somme des chiffres est 90, qui est divisible par 9.
   - **e) 11 : VRAI**. Critère de la somme alternée : $S = (0-9+8-7+6-5+4-3+2-1)+(9-8+7-6+5-4+3-2+1) = 0$. Comme 0 est divisible par 11, le nombre N l'est aussi.

Exercice 2 : Décomposition en facteurs premiers

On décompose chaque nombre en produit de nombres premiers :

1. **1998** :

$$\begin{aligned} 1998 &= 2 \times 999 \\ &= 2 \times 9 \times 111 \\ &= 2 \times 3^2 \times (3 \times 37) \\ &= \boxed{2 \times 3^3 \times 37} \end{aligned}$$

2. **112** :

$$\begin{aligned} 112 &= 2 \times 56 \\ &= 2 \times 8 \times 7 \\ &= 2 \times 2^3 \times 7 \\ &= \boxed{2^4 \times 7} \end{aligned}$$

3. **490** :

$$\begin{aligned} 490 &= 49 \times 10 \\ &= 7^2 \times (2 \times 5) \\ &= \boxed{2 \times 5 \times 7^2} \end{aligned}$$

4. **530** :

$$530 = 10 \times 53 = 2 \times 5 \times 53$$

On vérifie si 53 est premier. $\sqrt{53} \approx 7,2$. Les nombres premiers inférieurs sont 2, 3, 5, 7. 53 n'est divisible par aucun de ces nombres, donc 53 est premier.

$$\boxed{2 \times 5 \times 53}$$

Exercice 3

Montrer que la somme de deux nombres impairs est paire.

Soient n et m deux nombres entiers impairs. Par définition, il existe deux entiers k et p tels que :

$$n = 2k + 1 \quad \text{et} \quad m = 2p + 1$$

Calculons leur somme $S = n + m$:

$$\begin{aligned} S &= (2k + 1) + (2p + 1) \\ S &= 2k + 2p + 2 \\ S &= 2(k + p + 1) \end{aligned}$$

On pose $K = k + p + 1$. Comme k et p sont des entiers, K est un entier. On a donc : $\boxed{S = 2K}$.

Conclusion : La somme de deux nombres impairs est un multiple de 2, elle est donc **paire**.

Exercice 4

a) **Écriture de a et b :**

- Puisque a est un multiple de 8, il existe un entier k tel que : $\boxed{a = 8k}$.
- Puisque b est un multiple de 4, il existe un entier k' tel que : $\boxed{b = 4k'}$.

b) **Montrer que $C = a - 2b$ est un multiple de 8 :** On remplace a et b par leurs expressions :

$$C = 8k - 2(4k')$$
$$C = 8k - 8k'$$
$$C = 8(k - k')$$

Comme $k - k'$ est un entier relatif, C s'écrit sous la forme $8 \times$ Entier.

Donc C est un multiple de 8.

c) **Montrer que $D = ab$ est un multiple de 16 :** On effectue le produit :

$$D = (8k) \times (4k')$$
$$D = 32kk'$$
$$D = 16 \times (2kk')$$

Comme $2kk'$ est un entier, D s'écrit sous la forme $16 \times$ Entier. **Donc D est un multiple de 16.**

Exercice 5

a) **Liste des diviseurs entiers relatifs de 11 :** Le nombre 11 est premier. Ses seuls diviseurs positifs sont 1 et 11. Comme on cherche les diviseurs *entiers relatifs* (dans $\mathbb{Z}$), on ajoute les négatifs.

$$\mathcal{D}_{11} = \{-11\,;\,-1\,;\,1\,;\,11\}$$

b) **Liste des diviseurs entiers naturels de 24 :** On cherche les diviseurs positifs.

$$1 \times 24 = 24$$
$$2 \times 12 = 24$$
$$3 \times 8 = 24$$
$$4 \times 6 = 24$$

$$\mathcal{D}_{24} = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,6\,;\,8\,;\,12\,;\,24\}$$

Exercice 6 : Divisions euclidiennes

On rappelle la forme de la division euclidienne de a par b : $a = b \times q + r$ avec $0 \leq r < b$.

a) $a = 36\,036$ **et** $b = 75$

On pose la division : $36\,036 = 75 \times 480 + 36$

Ici, le quotient est $q = 480$ et le reste est $r = 36$. On vérifie bien que $0 \leq 36 < 75$.

$$\boxed{36\,036 = 75 \times 480 + 36}$$

b) $a = 1\,715$ **et** $b = 33$

$$1\,715 = 33 \times 51 + 32$$

Le quotient est $q = 51$ et le reste est $r = 32$. On vérifie que $0 \leq 32 < 33$.

$$\boxed{1\,715 = 33 \times 51 + 32}$$

c) $a = 8$ **et** $b = 125$ Comme $a < b$, le quotient est nul.

$$8 = 125 \times 0 + 8$$

Le quotient est $q = 0$ et le reste est $r = 8$.

$$\boxed{8 = 125 \times 0 + 8}$$

Exercice 7

Énoncé : Déterminer tous les entiers naturels m tels que :

- $m < 1\,000$
- m est pair (divisible par 2)
- m est divisible par 3
- m est divisible par 5
- m est un multiple de 11

Résolution : Si un nombre est divisible par 2, 3, 5 et 11, il est divisible par leur PPCM (Plus Petit Commun Multiple). Puisque 2, 3, 5 et 11 sont des nombres premiers (et donc premiers entre eux deux à deux), leur PPCM est simplement leur produit :

$$PPCM(2, 3, 5, 11) = 2 \times 3 \times 5 \times 11 = 330$$

Le nombre m doit donc être un multiple de 330. Cherchons les multiples de 330 inférieurs à 1 000 :

- $330 \times 1 = 330$

- $330 \times 2 = 660$
- $330 \times 3 = 990$
- $330 \times 4 = 1\,320$ (ce qui est supérieur à 1 000)

Les valeurs possibles pour m sont donc :

$$\boxed{330\,;\,660\,;\,990}$$