

Correction Exercice 1 : VRAI ou FAUX (6 points)

Affirmation 1 : VRAIE. On met au même dénominateur (10^{120}) :

$$\frac{1}{10^{118}} - \frac{1}{10^{120}} = \frac{1 \times 10^2}{10^{118} \times 10^2} - \frac{1}{10^{120}} = \frac{100}{10^{120}} - \frac{1}{10^{120}} = \boxed{\frac{99}{10^{120}}}$$

Affirmation 2 : FAUSSE. On sait que $16 = 4^2 = (-4)^2$. Donc $16^{-3} = ((-4)^2)^{-3} = (-4)^{-6}$. Simplifions l'expression en utilisant les propriétés des puissances de même base (-4) :

$$\begin{aligned} \frac{(-4)^{-2} \times 16^{-3} \times (-4)^5}{(-4)^3 \times (-4)^{-6}} &= \frac{(-4)^{-2} \times (-4)^{-6} \times (-4)^5}{(-4)^{3+(-6)}} \\ &= \frac{(-4)^{-2-6+5}}{(-4)^{-3}} \\ &= \frac{(-4)^{-3}}{(-4)^{-3}} \\ &= \boxed{1} \end{aligned}$$

Or, l'affirmation propose $(-4)^3$ (qui vaut -64). Comme $1 \neq -64$, l'affirmation est fausse.

Affirmation 3 : VRAIE. Effectuons le calcul :

$$A = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Or $\frac{1}{2} = 0,5$. C'est un nombre qui possède une écriture à virgule finie, c'est donc un **nombre décimal**.

Affirmation 4 : FAUSSE. La racine carrée d'une somme n'est pas égale à la somme des racines carrées ($\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$). Calculons pour vérifier : $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5} \approx 4,47$. Or, $\sqrt{7} \approx 2,6$, $\sqrt{3} \approx 1,7$ et $\sqrt{10} \approx 3,1$. La somme des trois dépasse largement 4,47.

Correction Exercice 2 (6 points)

1. Développer les expressions suivantes :

• $A = -(2x - 3)^2$

$$A = -[(2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2] \quad (\text{Identité remarquable})$$

$$A = -(4x^2 - 12x + 9)$$

$$A = \boxed{-4x^2 + 12x - 9}$$

$$\bullet B = (2a + 3)(a - 5) - (1 - a)^2$$

$$B = (2a^2 - 10a + 3a - 15) - (1^2 - 2 \times 1 \times a + a^2)$$

$$B = (2a^2 - 7a - 15) - (1 - 2a + a^2)$$

$$B = 2a^2 - 7a - 15 - 1 + 2a - a^2$$

$$B = \boxed{a^2 - 5a - 16}$$

2. Factoriser les expressions suivantes :

$$\bullet C = (2x - 5)(3x + 7) - (5 - x)(2x - 5) \text{ On remarque le facteur commun } (2x - 5).$$

$$C = (2x - 5)[(3x + 7) - (5 - x)]$$

$$C = (2x - 5)(3x + 7 - 5 + x)$$

$$C = \boxed{(2x - 5)(4x + 2)}$$

Note : On peut aussi factoriser $4x + 2$ en $2(2x + 1)$, donnant $2(2x - 5)(2x + 1)$.

$$\bullet D = (2x - 3)^2 - 25x^2 \text{ C'est une différence de deux carrés : } A^2 - B^2 = (A - B)(A + B), \text{ avec } A = (2x - 3) \text{ et } B = 5x \text{ (car } (5x)^2 = 25x^2 \text{).}$$

$$D = [(2x - 3) - 5x] \times [(2x - 3) + 5x]$$

$$D = (2x - 3 - 5x)(2x - 3 + 5x)$$

$$D = \boxed{(-3x - 3)(7x - 3)}$$

Note : On peut factoriser -3 dans le premier terme : $-3(x + 1)(7x - 3)$.

Correction Exercice 3 (4 points)

$$\text{On considère } E = (x + 1)^2 - (x + 1)(2x - 3).$$

1. Développer et réduire E.

$$E = (x^2 + 2x + 1) - (2x^2 - 3x + 2x - 3)$$

$$E = x^2 + 2x + 1 - (2x^2 - x - 3)$$

$$E = x^2 + 2x + 1 - 2x^2 + x + 3$$

$$E = \boxed{-x^2 + 3x + 4}$$

2. Calculer E pour $x = \frac{-1}{2}$. Utilisons la forme développée (souvent plus simple pour les fractions si pas de simplification évidente, mais ici la forme factorisée est aussi rapide). Utilisons la forme

factorisée trouvée ci-dessous pour changer : Forme factorisée : $E = (x + 1)(-x + 4)$.

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{-1}{2} + 1\right) \left(-\left(\frac{-1}{2}\right) + 4\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{8}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} = \boxed{\frac{9}{4}} \quad (\text{ou } 2,25) \end{aligned}$$

3. Factoriser E. Le facteur commun est $(x + 1)$.

$$\begin{aligned} E &= (x + 1)(x + 1) - (x + 1)(2x - 3) \\ E &= (x + 1)[(x + 1) - (2x - 3)] \\ E &= (x + 1)(x + 1 - 2x + 3) \\ E &= \boxed{(x + 1)(-x + 4)} \end{aligned}$$

4. Résoudre $E = 0$. On utilise la forme factorisée (équation produit-nul) :

$$(x + 1)(-x + 4) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul :

$$\begin{aligned} x + 1 &= 0 \quad \text{ou} \quad -x + 4 = 0 \\ x &= -1 \quad \text{ou} \quad x = 4 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $S = \{-1; 4\}$.

Correction Exercice 4 (4 points)

Commençons par simplifier les longueurs des côtés du rectangle :

- Longueur $AB = \sqrt{8} + 2\sqrt{2} = \sqrt{4 \times 2} + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.
- Largeur $BC = \sqrt{8} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = 1\sqrt{2}$ (soit $\sqrt{2}$).

1. Aire du rectangle :

$$\text{Aire} = AB \times BC = (4\sqrt{2}) \times (\sqrt{2}) = 4 \times (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) = 4 \times 2 = \boxed{8}$$

8 est bien un nombre entier.

2. Périmètre du rectangle :

$$\begin{aligned}
 p &= 2 \times (AB + BC) \\
 &= 2 \times (4\sqrt{2} + 1\sqrt{2}) \\
 &= 2 \times (5\sqrt{2}) \\
 &= \boxed{10\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat demandé.

3. Longueur de la diagonale : Dans le triangle ABC rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}
 AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\
 AC^2 &= (4\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 \\
 AC^2 &= (16 \times 2) + 2 \\
 AC^2 &= 32 + 2 \\
 AC^2 &= 34
 \end{aligned}$$

Comme AC est une longueur, $AC > 0$, donc $AC = \sqrt{34}$. **L'élève a raison.**