

Exercice 1 : Réel ou imaginaire pur ?

4 points

On commence par développer : $Z_1 = 2z - i + 3iz - 4 = (2 + 3i)z - 4 - i$.

1) Avec $z = a$ réel : $Z_1 = (2 + 3i)a - 4 - i = (2a - 4) + i(3a - 1)$.

Z_1 est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle : $3a - 1 = 0 \iff a = \frac{1}{3}$.

$$\boxed{z = \frac{1}{3}} \quad (\text{on a alors } Z_1 = \frac{2}{3} - 4 = -\frac{10}{3})$$

2) Avec $z = a + ib$: $(2 + 3i)(a + ib) = 2a + 2ib + 3ia + 3i^2b = (2a - 3b) + i(3a + 2b)$, donc

$$Z_1 = (2a - 3b - 4) + i(3a + 2b - 1)$$

Z_1 est imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle : $2a - 3b - 4 = 0 \iff b = \frac{2a - 4}{3}$.

$$\boxed{z = a + i \frac{2a - 4}{3}, \quad a \in \mathbb{R}}$$

Les points d'affixe z forment la droite d'équation $y = \frac{2x - 4}{3}$ dans le plan complexe. Exemple : $a = 2$ donne $z = 2$, et en effet $Z_1 = 4 - 4 + i(6 - 1) = 5i$.

Exercice 2 : Équation de degré 3

5 points

1) $P(-1) = (-1)^3 - 5(-1)^2 + 7(-1) + 13 = -1 - 5 - 7 + 13 = 0$: -1 est solution de (1).

2) Comme -1 est racine, $P(z)$ se factorise par $(z + 1)$: cherchons b et c réels tels que $P(z) = (z + 1)(z^2 + bz + c)$.

Développement : $(z + 1)(z^2 + bz + c) = z^3 + (b + 1)z^2 + (c + b)z + c$. Par identification avec $z^3 - 5z^2 + 7z + 13$:

$$b + 1 = -5 \Rightarrow b = -6 \quad c = 13 \quad (\text{et on vérifie } c + b = 7)$$

Donc $P(z) = (z + 1)(z^2 - 6z + 13)$. Pour $z^2 - 6z + 13 = 0$: $\Delta = 36 - 52 = -16 = (4i)^2$, d'où les racines $z = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i$. Ainsi

$$\boxed{P(z) = (z + 1)(z - 3 + 2i)(z - 3 - 2i)}$$

c'est-à-dire $\alpha = -1$, $\beta = 3 - 2i$ et $\gamma = 3 + 2i$.

3) Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul :

$$\boxed{S = \{-1; 3 - 2i; 3 + 2i\}}$$

Exercice 3 : La formule du binôme par récurrence

11 points

1) Pour $n = 0$: $(u + v)^0 = 1$ et $\sum_{p=0}^0 \binom{0}{p} u^{0-p} v^p = \binom{0}{0} u^0 v^0 = 1$. R_0 est vraie.

2) Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que R_k est vraie.

a. $(u + v)^{k+1} = (u + v)(u + v)^k = u(u + v)^k + v(u + v)^k$. En remplaçant $(u + v)^k$ par l'expression donnée par R_k :

$$(u + v)^{k+1} = u \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} u^{k-p} v^p + v \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} u^{k-p} v^p$$

b. On fait entrer u (puis v) dans chaque somme : $u \times u^{k-p} v^p = u^{k+1-p} v^p$ et $v \times u^{k-p} v^p = u^{k-p} v^{p+1}$. Donc

$$(u + v)^{k+1} = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} u^{k+1-p} v^p + \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} u^{k-p} v^{p+1}$$

c. Dans la seconde somme, on effectue le changement d'indice $q = p + 1$: quand p va de 0 à k , q va de 1 à $k + 1$, et $p = q - 1$. Le terme général devient $\binom{k}{q-1} u^{k-(q-1)} v^q = \binom{k}{q-1} u^{k+1-q} v^q$. En renommant l'indice q en p :

$$(u + v)^{k+1} = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} u^{k+1-p} v^p + \sum_{p=1}^{k+1} \binom{k}{p-1} u^{k+1-p} v^p$$

d. On isole le terme $p = 0$ de la première somme et le terme $p = k + 1$ de la seconde, puis on regroupe les termes communs ($1 \leq p \leq k$) :

$$\begin{aligned} (u + v)^{k+1} &= \binom{k}{0} u^{k+1} + \sum_{p=1}^k \binom{k}{p} u^{k+1-p} v^p + \sum_{p=1}^k \binom{k}{p-1} u^{k+1-p} v^p + \binom{k}{k} v^{k+1} \\ &= u^{k+1} + \sum_{p=1}^k \left[\binom{k}{p} + \binom{k}{p-1} \right] u^{k+1-p} v^p + v^{k+1} \end{aligned}$$

D'après la relation de Pascal, $\binom{k}{p} + \binom{k}{p-1} = \binom{k+1}{p}$ pour $1 \leq p \leq k$. De plus $u^{k+1} = \binom{k+1}{0} u^{k+1} v^0$ et $v^{k+1} = \binom{k+1}{k+1} u^0 v^{k+1}$ (car $\binom{k+1}{0} = \binom{k+1}{k+1} = 1$). En réintégrant ces deux termes dans la somme :

$$(u + v)^{k+1} = \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p} u^{k+1-p} v^p$$

c'est-à-dire R_{k+1} est vraie.

3) R_0 est vraie (question 1) et R_k entraîne R_{k+1} pour tout $k \in \mathbb{N}$ (question 2) : par récurrence, R_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est la **formule du binôme de Newton**, valable pour tous complexes u et v .