

Exercice 1

4 points

Soit z un nombre complexe et soit Z_1 le nombre défini par : $Z_1 = (2z - i) + (3iz - 4)$.

- 1) Dans cette question, z est **réel** et on pose $z = a \in \mathbb{R}$.
Déterminer z pour que Z_1 soit réel.
- 2) Dans cette question, z est un nombre complexe quelconque. On pose $z = a + ib$, a et b réels.
Déterminer z tel que Z_1 soit imaginaire pur.

Exercice 2

5 points

Soit l'équation : $z^3 - 5z^2 + 7z + 13 = 0$. (1)

- 1) Vérifier que -1 est solution de (1).
- 2) En déduire une factorisation du polynôme $P(z) = z^3 - 5z^2 + 7z + 13$ sous la forme $(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma)$ où α , β et γ sont des nombres complexes.
- 3) Résoudre alors l'équation dans $\mathbb{C}$.

Exercice 3

11 points

Soient u et v deux nombres complexes. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note R_n la proposition :

$$(u + v)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} u^{n-p} v^p.$$

On souhaite démontrer par récurrence que la proposition R_n est vraie pour tout entier naturel n .

- 1) Vérifier que R_0 est vraie.
- 2) Soit k un entier naturel tel que R_k est vraie, c'est-à-dire tel que $(u + v)^k = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} u^{k-p} v^p$.

On souhaite montrer que R_{k+1} est vraie, autrement dit que $(u + v)^{k+1} = \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p} u^{k+1-p} v^p$.

a. Montrer que :

$$(u + v)^{k+1} = u \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} u^{k-p} v^p + v \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} u^{k-p} v^p.$$

b. En déduire que :

$$(u + v)^{k+1} = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} u^{k+1-p} v^p + \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} u^{k-p} v^{p+1}.$$

c. En déduire que :

$$(u + v)^{k+1} = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} u^{k+1-p} v^p + \sum_{p=1}^{k+1} \binom{k}{p-1} u^{k+1-p} v^p.$$

d. Montrer alors que :

$$(u + v)^{k+1} = \sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p} u^{k+1-p} v^p.$$

3) Conclure.