

Exercice 1 : Nombres complexes

10 points

1) Avec $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 4 - 5i$:

a. $z_1 + z_2 = (1 + 4) + (1 - 5)i = \boxed{5 - 4i}$

b. $z_1 z_2 = (1 + i)(4 - 5i) = 4 - 5i + 4i - 5i^2 = 4 - i + 5 = \boxed{9 - i}$

c. $3z_1 + 4z_2 = (3 + 3i) + (16 - 20i) = \boxed{19 - 17i}$

d. $z_1^2 = (1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = \boxed{2i}$

2) a. $\Delta = (8\sqrt{3})^2 - 4 \times 64 = 192 - 256 = -64 = (8i)^2$. Les solutions sont

$$z = \frac{8\sqrt{3} \pm 8i}{2} \implies \boxed{S = \{4\sqrt{3} - 4i; 4\sqrt{3} + 4i\}}$$

b. $\Delta = 4(1 + 2\cos\theta)^2 - 4(5 + 4\cos\theta) = 4(1 + 4\cos\theta + 4\cos^2\theta - 5 - 4\cos\theta) = 4(4\cos^2\theta - 4) = -16(1 - \cos^2\theta)$.

Comme $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$: $\Delta = -16\sin^2\theta = (4i\sin\theta)^2$. Les solutions sont

$$z = \frac{2(1 + 2\cos\theta) \pm 4i\sin\theta}{2} \implies \boxed{S = \{1 + 2\cos\theta - 2i\sin\theta; 1 + 2\cos\theta + 2i\sin\theta\}}$$

Remarque : si $\sin\theta = 0$ ($\theta = 0, \pi$ ou 2π), $\Delta = 0$ et les deux solutions sont confondues en la racine double réelle $1 + 2\cos\theta$.

3) Avec $z = x + iy$: $z + i = x + (y + 1)i$ et $z - iz = (x + iy) - i(x + iy) = x + iy - ix + y = (x + y) + (y - x)i$.
Donc

$$\begin{aligned} Z &= [x + (y + 1)i] [(x + y) + (y - x)i] \\ &= x(x + y) - (y + 1)(y - x) + i[x(y - x) + (y + 1)(x + y)] \\ &= (x^2 + 2xy - y^2 + x - y) + i(-x^2 + 2xy + y^2 + x + y) \end{aligned}$$

Z est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle :

$$\boxed{Z \in \mathbb{R} \iff y^2 + 2xy - x^2 + x + y = 0}$$

Contrôle : pour $z = i$ ($x = 0, y = 1$) la relation donne $1 + 0 - 0 + 0 + 1 = 2 \neq 0$; et en effet $Z = 2i \times (i + 1) = -2 + 2i$ n'est pas réel.

4) Posons $z = x + iy$. Alors $z\bar{z} = x^2 + y^2$ et $iz - i\bar{z} = i(z - \bar{z}) = i \times 2iy = -2y$. Donc

$$Z = x^2 + y^2 - 2y + 2$$

qui est un nombre réel. Oui, Z est réel pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Autre méthode : $\bar{Z} = \bar{z}z - i\bar{z} + iz + 2 = Z$, donc Z est réel.

Exercice 2 : Produits de matrices

5 points

- 1) A est de taille 2×3 et B de taille 3×2 : le nombre de colonnes de A (3) est égal au nombre de lignes de B (3), donc le produit AB est défini, et c'est une matrice 2×2 .

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times 0 & 1 \times 2 + 1 \times 1 + 1 \times (-3) \\ 2 \times 1 + 2 \times (-1) + 2 \times 0 & 2 \times 2 + 2 \times 1 + 2 \times (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le produit de deux matrices non nulles peut donc être la matrice nulle.

2) $M - N = \begin{pmatrix} 2-1 & 3-1 \\ 1-2 & -1+2 \\ 3-3 & 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} : \boxed{M - N = B}.$

- 3) Par distributivité du produit matriciel : $AM - AN = A(M - N) = AB = 0$ (matrice nulle 2×2 , question 1). Donc $\boxed{AM = AN}$.

On remarque que $AM = AN$ n'entraîne pas $M = N$: on ne peut pas « simplifier par A », car A n'est pas inversible (elle n'est même pas carrée).

Exercice 3 : Puissances d'une matrice

5 points

1)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 10 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $5I + N = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$, et $25I + 10N = \begin{pmatrix} 25 & 10 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = A^2$:

$$\boxed{A = 5I + N \quad A^2 = 25I + 10N}$$

On retrouve $A^2 = (5I + N)^2 = 25I + 10N + N^2 = 25I + 10N$ car $N^2 = 0$ (et I commute avec N).

- 3) Notons $P(k)$: « $A^k = 5^k I + k 5^{k-1} N$ ».

Initialisation : pour $k = 1$, $5^1 I + 1 \times 5^0 N = 5I + N = A = A^1$: $P(1)$ est vraie.

Hérédité : supposons $P(k)$ vraie pour un entier $k \geq 1$. Alors, en utilisant $A = 5I + N$, $IN = NI = N$ et $N^2 = 0$:

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k \times A = (5^k I + k 5^{k-1} N) (5I + N) \\ &= 5^{k+1} I + 5^k N + k 5^k N + k 5^{k-1} N^2 \\ &= 5^{k+1} I + (k+1) 5^k N \end{aligned}$$

c'est-à-dire $P(k+1)$.

Conclusion : par récurrence, pour tout entier $k \geq 1$, $A^k = 5^k I + k 5^{k-1} N = \begin{pmatrix} 5^k & k 5^{k-1} \\ 0 & 5^k \end{pmatrix}$.