

Exercice 1

10 points

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- 1) On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 4 - 5i$. Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :
 - a. $z_1 + z_2$
 - b. $z_1 z_2$
 - c. $3z_1 + 4z_2$
 - d. z_1^2
- 2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes en donnant les solutions sous forme algébrique :
 - a. $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$
 - b. $z^2 - 2(1 + 2\cos\theta)z + 5 + 4\cos\theta = 0$, où θ est un réel de l'intervalle $[0; 2\pi]$.
- 3) On pose $z = x + iy$. Quelle relation doit lier x et y pour que le nombre $Z = (z + i)(z - iz)$ soit réel?
- 4) z est un nombre complexe. On pose $Z = z\bar{z} + iz - i\bar{z} + 2$. Le nombre complexe Z est-il réel?

Exercice 2

5 points

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

- 1) Expliquer pourquoi le produit AB est défini, puis le calculer.
- 2) Calculer la matrice $M - N$. Quelle matrice retrouve-t-on?
- 3) À partir des questions précédentes, justifier l'égalité $AM = AN$ sans calculer ces produits.

Exercice 3

5 points

On pose $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer les matrices A^2 et N^2 .
- 2) Exprimer A puis A^2 en fonction de I et de N .
- 3) Montrer par récurrence que, pour tout entier $k \geq 1$,

$$A^k = 5^k I + k 5^{k-1} N.$$