

Exercice 1 : Calcul matriciel

9 points

- 1) Le coefficient a_{ij} est en ligne i , colonne j . Sur la diagonale ($i = j$) : 1 ; au-dessus ($i < j$) : $j - i$; en dessous ($i > j$) : 0. Par exemple $a_{13} = 3 - 1 = 2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2)

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & 6-3 \\ -2+1 & -3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \times B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 & 3-3 \\ -2+2 & -3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$$

Ainsi $B^3 = -I_2$, soit $B \times (-B^2) = I_2$ (et de même $(-B^2) \times B = I_2$). Il existe donc une matrice $M = -B^2$ telle que $BM = MB = I_2$: **B est inversible** et

$$B^{-1} = -B^2 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vérification : } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & -6+6 \\ 1-1 & 3-2 \end{pmatrix} = I_2.$$

- 3) Une matrice carrée de taille 2 est inversible si et seulement si son déterminant est non nul :

$$\det C = x \times 2x - (-x) \times 1 = 2x^2 + x = x(2x + 1)$$

$$\det C = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}. \text{ Donc } \boxed{C \text{ est inversible si et seulement si } x \neq 0 \text{ et } x \neq -\frac{1}{2}}.$$

- 4) $D^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} = 4D$. On conjecture $D^n = 4^{n-1}D$ pour tout $n \geq 1$, et on le démontre par récurrence.

Initialisation : $D^1 = 4^0 D = D$.

Hérédité : si $D^n = 4^{n-1}D$ pour un entier $n \geq 1$, alors $D^{n+1} = D^n \times D = 4^{n-1}D^2 = 4^{n-1} \times 4D = 4^n D$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$D^n = 4^{n-1}D = \begin{pmatrix} 2 \times 4^{n-1} & 2 \times 4^{n-1} \\ 2 \times 4^{n-1} & 2 \times 4^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{2n-1} & 2^{2n-1} \\ 2^{2n-1} & 2^{2n-1} \end{pmatrix}$$

- 5) Le système s'écrit $MX = Y$ avec $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\det M = 2 \times (-2) - 1 \times 1 = -5 \neq 0$, donc M est inversible :

$$M^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Le système admet une unique solution $X = M^{-1}Y$:

$$X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(x; y) = \left(\frac{7}{5}; \frac{1}{5}\right)}$$

Vérification : $2 \times \frac{7}{5} + \frac{1}{5} = \frac{15}{5} = 3$ et $\frac{7}{5} - \frac{2}{5} = 1$.

Exercice 2 : Suite de matrices colonnes

8 points

1) Notons $P(n)$ la propriété « $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & n 2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ ».

Initialisation : pour $n = 0$, $A^0 = I_3$ et la formule donne $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (car $0 \times 2^{-1} = 0$) : $P(0)$ est vraie.

Hérédité : supposons $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq 0$. Alors

$$A^{n+1} = A \times A^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & n 2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 2 \times n 2^{n-1} + 2^n \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

et $2 \times n 2^{n-1} + 2^n = n 2^n + 2^n = (n+1) 2^n = (n+1) 2^{(n+1)-1}$: c'est exactement $P(n+1)$.

Conclusion : par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & n 2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

2) Posons $S = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. $S = AS + B$ s'écrit

$$\begin{cases} a = 2a + c - 1 \\ b = 2b - 1 \\ c = 2c - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Vérification : $AS + B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = S$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant $U_{n+1} = AU_n + B$ et $S = AS + B$:

$$V_{n+1} = U_{n+1} - S = (AU_n + B) - (AS + B) = AU_n - AS = A(U_n - S) = AV_n$$

$$\boxed{V_{n+1} = AV_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

4) La relation $V_{n+1} = AV_n$ donne, par une récurrence immédiate, $V_n = A^n V_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec

$$V_0 = U_0 - S = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ D'après la question 1 :}$$

$$V_n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & n 2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} + n 2^{n-1} \\ 2^n \\ 2^n \end{pmatrix}$$

puis $U_n = V_n + S$:

$$\boxed{V_n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} + n 2^{n-1} \\ 2^n \\ 2^n \end{pmatrix} \quad U_n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} + n 2^{n-1} \\ 2^n + 1 \\ 2^n + 1 \end{pmatrix}}$$

$$\text{Contrôle : } U_1 = AU_0 + B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ et la formule donne } 4 + 1 = 5, 2 + 1 = 3,$$

$$2 + 1 = 3.$$

5) Une suite de matrices converge si et seulement si chacun de ses coefficients converge. Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n + 1 = +\infty \text{ (et le premier coefficient tend aussi vers } +\infty \text{). } \boxed{\text{La suite } (U_n) \text{ n'est pas convergente.}}$$

Exercice 3 : Matrices de rotation

3 points

1) La matrice de la rotation de centre O et d'angle θ est $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Avec $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\boxed{M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}}$$

2) Les coordonnées de l'image A' sont données par $M_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \end{pmatrix}$, donc

$$\boxed{A' \left(\frac{1 - 3\sqrt{3}}{2}; \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \right)}$$

- 3) Appliquer R_1 puis R_2 revient à multiplier par M_1 puis par M_2 : la matrice de la transformation composée est $M = M_2 M_1$ (attention à l'ordre).

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{pmatrix}$$

- 4) La composée de deux rotations de centre O est la rotation de centre O dont l'angle est la somme des angles : $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$. Donc $M = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{12} & -\sin \frac{\pi}{12} \\ \sin \frac{\pi}{12} & \cos \frac{\pi}{12} \end{pmatrix}$. Par identification avec la question 3 :

$$\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Cohérence : $\cos \frac{\pi}{12} \approx 0,966$ et $\sin \frac{\pi}{12} \approx 0,259$, tous deux positifs, et $\cos^2 + \sin^2 = \frac{8+8}{16} = 1$.