

Calculatrice interdite

Exercice 1

9 points

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- 1) A est une matrice carrée de taille 4 de coefficients a_{ij} définis par : $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ j - i & \text{si } i < j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$

Déterminer la matrice A .

- 2) On pose $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer B^2 et B^3 , puis montrer sans calculer de déterminant que B est inversible. Donner alors sa matrice inverse.
- 3) On pose $C = \begin{pmatrix} x & -x \\ 1 & 2x \end{pmatrix}$ où x est un réel. Déterminer les éventuelles valeurs de x telles que la matrice C soit inversible.
- 4) On pose $D = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer une expression de D^n en fonction de n .
- 5) En utilisant le calcul matriciel, résoudre le système suivant d'inconnue $(x; y)$: $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$

Exercice 2

8 points

Soit (U_n) la suite de matrices colonnes définie, pour tout entier naturel n , par $U_{n+1} = AU_n + B$ avec

$$U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- 1) Par récurrence, démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.
- 2) Déterminer la matrice colonne S telle que $S = AS + B$.
- 3) On pose $V_n = U_n - S$. Montrer que $V_{n+1} = AV_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 4) Donner alors une expression de V_n puis de U_n en fonction de n .
- 5) La suite de matrices (U_n) est-elle convergente ?

Exercice 3**3 points**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; I ; J)$, on considère la rotation R_1 d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre O , et la rotation R_2 d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et de centre O .

- 1) Écrire les matrices M_1 et M_2 représentatives des rotations R_1 et R_2 .
- 2) Déterminer l'image du point $A(1 ; 3)$ par la rotation R_1 .
- 3) On effectue successivement la rotation R_1 puis la rotation R_2 . Déterminer la matrice M associée à cette nouvelle transformation.
- 4) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.