

Exercice 1 : PGCD selon n

3 points

- 1) Soit $d = \text{PGCD}(a; b)$. Comme d divise a et b , il divise toute combinaison linéaire à coefficients entiers de a et b , en particulier

$$a - 2b = (2n + 1) - 2(n + 3) = 2n + 1 - 2n - 6 = -5$$

Donc d divise -5 , c'est-à-dire d divise 5 .

- 2) Les diviseurs positifs de 5 sont 1 et 5 , donc $d \in \{1; 5\}$. On a $d = 5$ si et seulement si 5 divise à la fois a et b .

$$5 \mid b \iff n + 3 \equiv 0 [5] \iff n \equiv -3 [5] \iff n \equiv 2 [5].$$

Dans ce cas, $a = 2n + 1 \equiv 2 \times 2 + 1 = 5 \equiv 0 [5]$: 5 divise aussi a (ce qui était prévisible, puisque $a = 2b - 5$).

Conclusion : $\text{PGCD}(a; b) = 5$ si $n \equiv 2 [5]$, et $\text{PGCD}(a; b) = 1$ sinon.

Exemple : $n = 2$ donne $a = 5, b = 5$; $n = 3$ donne $a = 7, b = 6$, premiers entre eux.

Exercice 2 : Inverse modulo 12

3 points

- 1) $5 \times 5 = 25 = 2 \times 12 + 1$, donc $5 \times 5 \equiv 1 [12]$: 5 est inversible modulo 12 et est son propre inverse.
(On peut aussi dire : $\text{PGCD}(5; 12) = 1$, donc 5 est inversible modulo 12.)

- 2) On multiplie les deux membres par l'inverse de 5 , c'est-à-dire par 5 :

$$5x \equiv 4 [12] \iff 5 \times 5x \equiv 5 \times 4 [12] \iff x \equiv 20 [12] \iff x \equiv 8 [12]$$

(l'équivalence est justifiée car $5 \times 5 \equiv 1$). Vérification : $5 \times 8 = 40 = 3 \times 12 + 4$.

$$S = \{8 + 12k, k \in \mathbb{Z}\}$$

Exercice 3 : Équation diophantienne

9 points

- 1) a. Algorithme d'Euclide pour 23 et 19 :

$$23 = 1 \times 19 + 4 \quad 19 = 4 \times 4 + 3 \quad 4 = 1 \times 3 + 1$$

Le dernier reste non nul est 1 : $\text{PGCD}(23; 19) = 1$. On remonte l'algorithme :

$$\begin{aligned} 1 &= 4 - 3 \\ &= 4 - (19 - 4 \times 4) = 5 \times 4 - 19 \\ &= 5 \times (23 - 19) - 19 = 5 \times 23 - 6 \times 19 \end{aligned}$$

Donc $(x_0; y_0) = (5; -6)$ est solution de (E') . Vérification : $115 - 114 = 1$.

b. En multipliant par 1000 : $23 \times 5000 + 19 \times (-6000) = 1000$, donc $(5000; -6000)$ est une solution particulière de (E) .

c. Soit $(x; y) \in \mathbb{Z}^2$ solution de (E) . En soustrayant l'égalité particulière :

$$23(x - 5000) + 19(y + 6000) = 0 \iff 23(x - 5000) = -19(y + 6000) \quad (*)$$

Ainsi 19 divise $23(x - 5000)$; comme $\text{PGCD}(19; 23) = 1$, d'après le théorème de Gauss, 19 divise $x - 5000$: il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 5000 + 19k$. En reportant dans $(*)$:

$$23 \times 19k = -19(y + 6000) \iff y = -6000 - 23k$$

Réciproquement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$: $23(5000 + 19k) + 19(-6000 - 23k) = 1000 + 437k - 437k = 1000$.

$$S = \{(5000 + 19k; -6000 - 23k), k \in \mathbb{Z}\}$$

2) Soit x le nombre de pièces de un euro et y le nombre de pièces de 10 centimes (x, y entiers naturels). La hauteur en millimètres est $2,3x + 1,9y$, et $10 \text{ cm} = 100 \text{ mm}$:

$$2,3x + 1,9y = 100 \iff 23x + 19y = 1000$$

On retrouve l'équation (E) , avec la contrainte $x \geq 0$ et $y \geq 0$:

$$5000 + 19k \geq 0 \iff k \geq -\frac{5000}{19} \approx -263,2 \quad \text{et} \quad -6000 - 23k \geq 0 \iff k \leq -\frac{6000}{23} \approx -260,9$$

Donc $k \in \{-263; -262; -261\}$, ce qui donne trois tas possibles :

k	pièces de 1 € (x)	pièces de 10 c (y)	vérification
-263	3	49	$6,9 + 93,1 = 100 \text{ mm}$
-262	22	26	$50,6 + 49,4 = 100 \text{ mm}$
-261	41	3	$94,3 + 5,7 = 100 \text{ mm}$

Oui : 3 pièces de 1 € et 49 de 10 c, ou 22 et 26, ou 41 et 3.

Exercice 4 : Une suite d'entiers

5 points

1) a. $u_1 = 4 \times 0 + 1 = 1$; $u_2 = 4 \times 1 + 1 = 5$; $u_3 = 4 \times 5 + 1 = 21$. $u_1 = 1, u_2 = 5, u_3 = 21$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation $u_{n+1} = 4u_n + 1$ s'écrit $1 \times u_{n+1} + (-4) \times u_n = 1$: c'est une relation de Bézout entre les entiers u_{n+1} et u_n . D'après le théorème de Bézout :

$$u_{n+1} \text{ et } u_n \text{ sont premiers entre eux.}$$

2) a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{3} = 4u_n + 1 + \frac{1}{3} = 4u_n + \frac{4}{3} = 4 \left(u_n + \frac{1}{3} \right) = 4v_n$$

Donc (v_n) est géométrique de raison 4 et de premier terme $v_0 = \frac{1}{3}$.

b. $v_n = v_0 \times 4^n = \frac{4^n}{3}$, puis $u_n = v_n - \frac{1}{3}$:

$$v_n = \frac{4^n}{3} \quad u_n = \frac{4^n - 1}{3}$$

Contrôle : $u_3 = \frac{64 - 1}{3} = 21$.

3) D'après la question 2.b, $4^n - 1 = 3u_n$ et $4^{n+1} - 1 = 3u_{n+1}$. Donc

$$\text{PGCD}(4^{n+1} - 1; 4^n - 1) = \text{PGCD}(3u_{n+1}; 3u_n) = 3 \text{PGCD}(u_{n+1}; u_n) = 3 \times 1$$

d'après la question 1.b. $\text{PGCD}(4^{n+1} - 1; 4^n - 1) = 3$

Autre méthode : $4^{n+1} - 1 = 4(4^n - 1) + 3$, donc ce PGCD vaut $\text{PGCD}(4^n - 1; 3) = 3$ car $4 \equiv 1 [3]$ entraîne $4^n - 1 \equiv 0 [3]$.

Exercice 5 : Jetons de 7 et 11 euros

2 points

Une transaction consiste à échanger des jetons : si Basile donne p jetons bleus et q jetons rouges et en reçoit p' et q' , la somme transférée vaut $7(p - p') + 11(q - q')$ euros, soit $7u + 11v$ avec $u, v \in \mathbb{Z}$. La question est donc : tout entier N s'écrit-il $7u + 11v$?

Comme 7 et 11 sont premiers entre eux, le théorème de Bézout garantit l'existence d'entiers u, v tels que $7u + 11v = 1$. Par l'algorithme d'Euclide : $11 = 7 + 4$, $7 = 4 + 3$, $4 = 3 + 1$, d'où

$$1 = 4 - 3 = 4 - (7 - 4) = 2 \times 4 - 7 = 2(11 - 7) - 7 = 2 \times 11 - 3 \times 7$$

En multipliant par N : $N = 2N \times 11 - 3N \times 7$. Pour transférer N euros, il suffit par exemple de donner $2N$ jetons rouges et de recevoir $3N$ jetons bleus (ou l'inverse pour $N < 0$).

Honorine a raison : toute somme entière est réalisable.