

Exercice 1

3 points

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a = 2n + 1$ et $b = n + 3$.

- 1) Montrer que $\text{PGCD}(a; b)$ divise 5.
- 2) Déterminer, selon les valeurs de n , le PGCD de a et b .

Exercice 2

3 points

- 1) Montrer que 5 est inversible modulo 12.
- 2) Résoudre $5x \equiv 4 \pmod{12}$.

Exercice 3

9 points

Soit l'équation $(E) : 23x + 19y = 1000$.

- 1)
 - a. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution de l'équation $(E') : 23x + 19y = 1$.
 - b. En déduire une solution particulière de (E) .
 - c. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{Z}^2$.
- 2) L'épaisseur d'une pièce de un euro est de 2,3 mm et celle d'une pièce de 10 centimes est égale à 1,9 mm. Est-il possible de faire un tas avec uniquement des pièces de un euro et de 10 centimes dont la hauteur soit exactement de 10 cm ? Si oui, avec combien de pièces de chaque sorte ?

Exercice 4

5 points

Soit (u_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 4u_n + 1$.

- 1)
 - a. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
 - b. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} et u_n sont premiers entre eux.
- 2) On pose pour $n \in \mathbb{N} : v_n = u_n + \frac{1}{3}$.
 - a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
 - b. En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n .
- 3) Calculer $\text{PGCD}(4^{n+1} - 1; 4^n - 1)$.

Exercice 5

2 points

Basile et Honorine ont à leur disposition des jetons bleus et des jetons rouges. Ils décident que chaque jeton bleu vaut 7 euros et que chaque jeton rouge vaut 11 euros. Honorine affirme : « nous pouvons faire n'importe quelle transaction en nombre entier d'euros entre nous. » A-t-elle raison ? (ils ne sont pas limités par le nombre de jetons...)