

Exercice 1 : Nombres réels

4 points

Rappel : un nombre complexe Z est réel si et seulement si $\bar{Z} = Z$.

1) En posant $z = x + iy$ avec x, y réels : $Z_1 = z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x$. Donc $Z_1 = 2 \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$.

2) Comme $u\bar{u} = 1$, on a $\bar{u} = \frac{1}{u}$ (et $u \neq 0$). Calculons le conjugué de Z_2 avec les règles $\overline{a - b} = \bar{a} - \bar{b}$, $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$ et $\overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$:

$$\overline{Z_2} = \frac{\bar{z} - \bar{u}z}{1 - \bar{u}} = \frac{\bar{z} - \frac{z}{u}}{1 - \frac{1}{u}}$$

On multiplie numérateur et dénominateur par u :

$$\overline{Z_2} = \frac{u\bar{z} - z}{u - 1} = \frac{-(z - u\bar{z})}{-(1 - u)} = \frac{z - u\bar{z}}{1 - u} = Z_2$$

Le dénominateur $1 - u$ est bien non nul car $u \neq 1$. Comme $\overline{Z_2} = Z_2$, $Z_2 \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 : Forme algébrique et réciproque

5 points

1) Avec $z = x + iy$: $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ et $-4iz = -4ix - 4i^2y = -4ix + 4y$. Donc

$$Z = (x^2 - y^2 + 2ixy) + (4y - 4ix) + 4 \implies Z = (x^2 - y^2 + 4y + 4) + i(2xy - 4x)$$

2) Si z est un imaginaire pur, alors $x = 0$. La partie imaginaire de Z vaut $2xy - 4x = 0 - 0 = 0$, donc Z est réel (et $Z = -y^2 + 4y + 4$).

3) La réciproque serait : « si Z est réel, alors z est un imaginaire pur ». Or

$$Z \in \mathbb{R} \iff 2xy - 4x = 0 \iff 2x(y - 2) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } y = 2$$

Le cas $y = 2$ fournit des contre-exemples : pour $z = 3 + 2i$, on obtient $Z = 9 - 4 + 8 + 4 = 17 \in \mathbb{R}$ alors que z n'est pas un imaginaire pur. La réciproque est fausse.

Exercice 3 : Résolution d'équations

5 points

a) $-z^2 + 8z - 25 = 0 \iff z^2 - 8z + 25 = 0$. Discriminant : $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 25 = 64 - 100 = -36 = (6i)^2$. Les solutions sont

$$z_1 = \frac{8 - 6i}{2} = 4 - 3i \quad z_2 = \frac{8 + 6i}{2} = 4 + 3i \implies S = \{4 - 3i; 4 + 3i\}$$

b) On cherche une racine évidente : $2 \times 1^3 - 1^2 + 1 - 2 = 0$, donc $z = 1$ est solution. On factorise par $(z - 1)$: on cherche a, b, c tels que $2z^3 - z^2 + z - 2 = (z - 1)(az^2 + bz + c)$.

Développement : $(z-1)(az^2+bz+c) = az^3 + (b-a)z^2 + (c-b)z - c$. Par identification : $a = 2$, $b-a = -1 \Rightarrow b = 1$, $-c = -2 \Rightarrow c = 2$ (et on vérifie $c-b = 1$). Donc

$$2z^3 - z^2 + z - 2 = (z-1)(2z^2 + z + 2)$$

Pour $2z^2 + z + 2 = 0$: $\Delta = 1 - 16 = -15 = (i\sqrt{15})^2$, d'où $z = \frac{-1 \pm i\sqrt{15}}{4}$.

$$S = \left\{ 1; \frac{-1 - i\sqrt{15}}{4}; \frac{-1 + i\sqrt{15}}{4} \right\}$$

Exercice 4 : Un polynôme réciproque

6 points

1) **Conjugué.** Les coefficients de P sont réels. Si $P(\alpha) = 0$, en conjuguant (le conjugué d'une somme est la somme des conjugués, et $\bar{\bar{k}} = k$ pour k réel) :

$$0 = \overline{P(\alpha)} = \bar{\alpha}^4 - 3\bar{\alpha}^3 + \frac{9}{2}\bar{\alpha}^2 - 3\bar{\alpha} + 1 = P(\bar{\alpha})$$

donc $\bar{\alpha}$ est racine.

Inverse. D'abord $\alpha \neq 0$ car $P(0) = 1 \neq 0$. Pour $z \neq 0$, les coefficients de P se lisent de la même façon dans les deux sens :

$$P\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^4} - \frac{3}{z^3} + \frac{9}{2z^2} - \frac{3}{z} + 1 = \frac{1 - 3z + \frac{9}{2}z^2 - 3z^3 + z^4}{z^4} = \frac{P(z)}{z^4}$$

Donc $P\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{P(\alpha)}{\alpha^4} = 0$: $\frac{1}{\alpha}$ est racine.

2) $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$; $(1+i)^3 = 2i(1+i) = -2 + 2i$; $(1+i)^4 = (2i)^2 = -4$. Alors

$$P(1+i) = -4 - 3(-2 + 2i) + \frac{9}{2}(2i) - 3(1+i) + 1 = -4 + 6 - 6i + 9i - 3 - 3i + 1 = 0$$

$$P(1+i) = 0$$

3) $1+i$ est racine. D'après la question 1, $\overline{1+i} = 1-i$ est racine, ainsi que $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2}$ et son conjugué $\frac{1+i}{2}$. Ces quatre nombres sont deux à deux distincts, et un polynôme de degré 4 a au plus 4 racines :

$$S = \left\{ 1+i; 1-i; \frac{1+i}{2}; \frac{1-i}{2} \right\}$$

4) On regroupe les racines conjuguées. Pour $1 \pm i$: somme 2, produit $(1+i)(1-i) = 2$, d'où le facteur $z^2 - 2z + 2$. Pour $\frac{1 \pm i}{2}$: somme 1, produit $\frac{1}{2}$, d'où le facteur $z^2 - z + \frac{1}{2}$. Le coefficient dominant de P étant 1 :

$$P(z) = (z^2 - 2z + 2) \left(z^2 - z + \frac{1}{2} \right)$$