

Exercice 1 : Calculs de dérivées

8 points

- $f(x) = (x^2 - 7)(1 - 2x^2)$. f est un produit de deux fonctions polynômes, dérivables sur $\mathbb{R}$: f est **dérivable sur $\mathbb{R}$** . Avec $u(x) = x^2 - 7$, $u'(x) = 2x$, $v(x) = 1 - 2x^2$, $v'(x) = -4x$ et $(uv)' = u'v + uv'$:

$$f'(x) = 2x(1 - 2x^2) + (x^2 - 7)(-4x) = 2x - 4x^3 - 4x^3 + 28x = \boxed{-8x^3 + 30x}$$

(Vérification : $f(x) = -2x^4 + 15x^2 - 7$, d'où $f'(x) = -8x^3 + 30x$.)

- $t(x) = \frac{x^2 + 3x - 7}{x + 5}$. Le dénominateur s'annule pour $x = -5$. t est un quotient de fonctions polynômes : elle est **dérivable sur $] -\infty; -5[$ et sur $] -5; +\infty[$** . Avec $u(x) = x^2 + 3x - 7$, $u'(x) = 2x + 3$, $v(x) = x + 5$, $v'(x) = 1$ et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$t'(x) = \frac{(2x + 3)(x + 5) - (x^2 + 3x - 7) \times 1}{(x + 5)^2} = \frac{2x^2 + 10x + 3x + 15 - x^2 - 3x + 7}{(x + 5)^2} = \boxed{\frac{x^2 + 10x + 22}{(x + 5)^2}}$$

- $w(x) = \frac{5\sqrt{x}}{7 - 3x}$. w est définie pour $x \geq 0$ et $7 - 3x \neq 0$, soit $x \neq \frac{7}{3}$. La fonction racine carrée est dérivable sur $]0; +\infty[$ (pas en 0); le quotient est donc **dérivable sur $]0; \frac{7}{3}[$ et sur $\left] \frac{7}{3}; +\infty \right[$** .

Avec $u(x) = 5\sqrt{x}$, $u'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}}$, $v(x) = 7 - 3x$, $v'(x) = -3$:

$$w'(x) = \frac{\frac{5}{2\sqrt{x}}(7 - 3x) - 5\sqrt{x} \times (-3)}{(7 - 3x)^2} = \frac{\frac{5(7 - 3x) + 30x}{2\sqrt{x}}}{(7 - 3x)^2} = \frac{35 + 15x}{2\sqrt{x}(7 - 3x)^2} = \boxed{\frac{5(7 + 3x)}{2\sqrt{x}(7 - 3x)^2}}$$

(On a réduit au même dénominateur $2\sqrt{x}$ au numérateur : $5\sqrt{x} \times 3 = \frac{30x}{2\sqrt{x}}$ car $\sqrt{x} \times \sqrt{x} = x$.)

- $n(x) = (-5 + 3x)^7$. n est de la forme u^7 avec $u(x) = 3x - 5$ polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$, $u'(x) = 3$: n est **dérivable sur $\mathbb{R}$** et $(u^7)' = 7u^6 u'$:

$$n'(x) = 7 \times 3 \times (3x - 5)^6 = \boxed{21(3x - 5)^6}$$

Exercice 2 : Valeurs exactes en trigonométrie

6 points

- 1) Comme $0 < \frac{\pi}{12} < \pi$, on a $\sin \frac{\pi}{12} > 0$. Or $\sqrt{6} > \sqrt{2}$, donc $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} > 0$ et $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} < 0$. La seule valeur possible est donc $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Vérification avec $\cos^2 + \sin^2 = 1$:

$$\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 + (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{16} = \frac{(2 + 2\sqrt{12} + 6) + (6 - 2\sqrt{12} + 2)}{16} = \frac{16}{16} = 1$$

- 2) On ramène chaque angle à $\frac{\pi}{12}$:

- $\frac{13\pi}{12} = \pi + \frac{\pi}{12}$, et $\cos(\pi + x) = -\cos x$, donc $\cos \frac{13\pi}{12} = -\cos \frac{\pi}{12}$;
- $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$, et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$, donc $\sin \frac{7\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{12}$;
- $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$, et $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, donc $\cos \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12}$.

Ainsi :

$$A = -\cos \frac{\pi}{12} - 3\cos \frac{\pi}{12} + 4\sin \frac{\pi}{12} = \boxed{-4\cos \frac{\pi}{12} + 4\sin \frac{\pi}{12}}$$

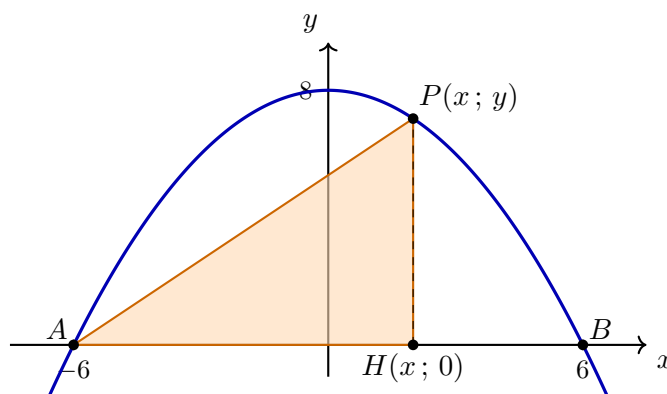
3) En remplaçant par les valeurs exactes :

$$A = -4 \times \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} + 4 \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = -\sqrt{2} - \sqrt{6} + \sqrt{6} - \sqrt{2} = \boxed{-2\sqrt{2}}$$

Exercice 3 : Aire maximale

6 points

Mise en place. $A(-6; 0)$ et $B(6; 0)$; le point $P(x; y)$ est sur la parabole avec $-6 < x < 6$, donc $y = -\frac{2}{9}x^2 + 8 = \frac{72 - 2x^2}{9} = \frac{2(36 - x^2)}{9} > 0$. Son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses est $H(x; 0)$.



Aire du triangle. Le triangle APH est rectangle en H (car (PH) est perpendiculaire à l'axe des abscisses). Ses côtés de l'angle droit mesurent $AH = x - (-6) = x + 6$ et $PH = y = \frac{2(36 - x^2)}{9}$.
Donc :

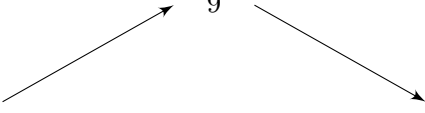
$$\mathcal{A}_{APH} = \frac{AH \times PH}{2} = \frac{1}{2}(x + 6) \times \frac{2(36 - x^2)}{9} = \boxed{\frac{1}{9}(x + 6)(36 - x^2)} \quad \forall x \in]-6; 6[$$

Recherche du maximum. Posons $g(x) = \frac{1}{9}(x + 6)(36 - x^2)$ sur $] -6; 6[$. g est un produit de polynômes, dérivable, avec $u(x) = x + 6$, $u'(x) = 1$, $v(x) = 36 - x^2$, $v'(x) = -2x$:

$$g'(x) = \frac{1}{9} [1 \times (36 - x^2) + (x + 6)(-2x)] = \frac{1}{9} (36 - x^2 - 2x^2 - 12x) = \frac{1}{9} (-3x^2 - 12x + 36) = -\frac{1}{3} (x^2 + 4x - 12)$$

Le trinôme $x^2 + 4x - 12$ a pour discriminant $\Delta = 16 + 48 = 64$ et pour racines $x_1 = \frac{-4 - 8}{2} = -6$ et $x_2 = \frac{-4 + 8}{2} = 2$. Donc $g'(x) = -\frac{1}{3}(x + 6)(x - 2)$.

Sur $] -6 ; 6[$, $x + 6 > 0$: le signe de $g'(x)$ est celui de $-(x - 2)$, positif pour $x < 2$ et négatif pour $x > 2$.

x	-6	2	6
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\frac{256}{9}$ 		

g est croissante sur $] -6 ; 2]$ et décroissante sur $[2 ; 6[$: l'aire est **maximale pour** $x = 2$, et elle vaut alors $g(2) = \frac{1}{9} \times 8 \times 32 = \frac{256}{9} \approx 28,4$ (unités d'aire).

Conclusion. Pour $x = 2$: $y = -\frac{2}{9} \times 4 + 8 = \frac{-8 + 72}{9} = \frac{64}{9}$. L'aire du triangle APH est maximale pour

$$P\left(2; \frac{64}{9}\right).$$