

Exercice 1 : Inéquation quotient

4 points

Valeur interdite. Le dénominateur s'annule pour $2x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$. On résout donc sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Signe du numérateur. $3x^2 - 7x + 2$ est un trinôme avec $a = 3, b = -7, c = 2$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 49 - 24 = 25 > 0$$

Deux racines : $x_1 = \frac{7-5}{6} = \frac{1}{3}$ et $x_2 = \frac{7+5}{6} = 2$. Comme $a = 3 > 0$, le trinôme est positif à l'extérieur des racines et négatif entre les racines.

Signe du dénominateur. $2x + 1 > 0 \iff x > -\frac{1}{2}$.

Tableau de signes.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	2	$+\infty$	
$3x^2 - 7x + 2$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$2x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{3x^2 - 7x + 2}{2x + 1}$	$-$	$+$	0	$-$	0	$+$

Le quotient est positif ou nul sur les intervalles où la dernière ligne est + ou 0, en excluant la valeur interdite :

$$\mathcal{S} = \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right] \cup [2; +\infty[$$

Exercice 2 : Bénéfice d'une entreprise

6 points

- 1) Le bénéfice est la différence entre la recette et le coût. La recette pour x balançoires vendues 300 € est $300x$. Donc, pour tout $x \in [0; 50]$:

$$B(x) = 300x - f(x) = 300x - (x^2 + 230x + 325) = 300x - x^2 - 230x - 325 = -x^2 + 70x - 325$$

- 2) B est une fonction polynôme du second degré avec $a = -1 < 0$: elle est croissante puis décroissante, avec un maximum atteint en

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{70}{2 \times (-1)} = 35$$

Calculs : $B(0) = -325$; $B(35) = -35^2 + 70 \times 35 - 325 = -1\,225 + 2\,450 - 325 = 900$; $B(50) = -2\,500 + 3\,500 - 325 = 675$.

x	0	35	50
$B(x)$	-325	900	675

B est **croissante** sur $[0 ; 35]$ et **décroissante** sur $[35 ; 50]$.

(Autre méthode : $B'(x) = -2x + 70$, positif pour $x < 35$ et négatif pour $x > 35$.)

3) Le bénéfice maximal est atteint pour 35 balançoires et vaut $B(35) = \boxed{900 \text{ €}}$.

4) L'entreprise est rentable lorsque $B(x) > 0$, c'est-à-dire $-x^2 + 70x - 325 > 0$.

Trinôme avec $a = -1$, $b = 70$, $c = -325$: $\Delta = 70^2 - 4 \times (-1) \times (-325) = 4\,900 - 1\,300 = 3\,600 = 60^2$.

$$x_1 = \frac{-70 + 60}{-2} = 5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-70 - 60}{-2} = 65$$

Comme $a < 0$, le trinôme est strictement positif **entre** les racines : $B(x) > 0 \iff 5 < x < 65$.

Sur $[0 ; 50]$ et pour un nombre entier de balançoires : l'entreprise est rentable si elle produit et vend entre 6 et 50 balançoires (pour 5 balançoires, $B(5) = 0$: ni gain ni perte).

Exercice 3 : Fonction trigonométrique

7 points

$$f(x) = 2 \cos(x) - 1 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

1) Pour tout réel x , $f(x + 2\pi) = 2 \cos(x + 2\pi) - 1 = 2 \cos(x) - 1 = f(x)$ car la fonction cosinus est 2π -périodique.

Donc f est périodique, de période 2π .

2) Sur la calculatrice, la courbe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : on conjecture que f est **paire**.

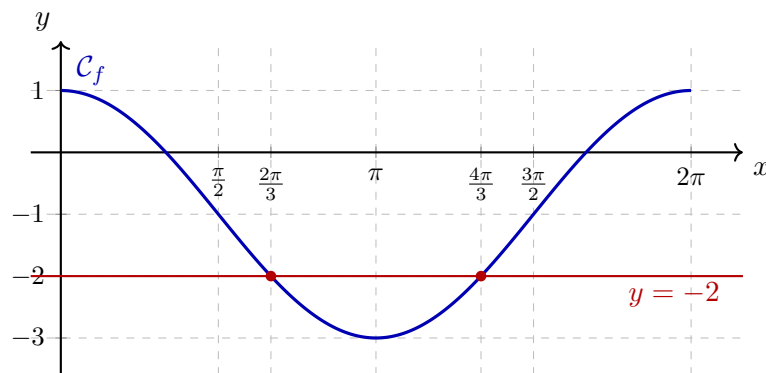
3) Pour tout réel x , $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = 2 \cos(-x) - 1 = 2 \cos(x) - 1 = f(x)$ car la fonction cosinus est paire.

Donc f est **paire** : la conjecture est prouvée.

4) Pour tout réel x : $-1 \leq \cos(x) \leq 1$. En multipliant par $2 > 0$: $-2 \leq 2 \cos(x) \leq 2$. En retranchant 1 :

$$-3 \leq 2 \cos(x) - 1 \leq 1 \quad \text{soit} \quad \boxed{-3 \leq f(x) \leq 1}$$

5) On trace la courbe de f sur $[0 ; 2\pi]$ et la droite d'équation $y = -2$:



La droite coupe la courbe en **deux points** sur $[0; 2\pi]$: l'équation $f(x) = -2$ admet 2 solutions, situées environ en 2,1 et 4,2.

6) Résolution algébrique :

$$f(x) = -2 \iff 2 \cos(x) - 1 = -2 \iff 2 \cos(x) = -1 \iff \cos(x) = -\frac{1}{2}$$

Or $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$. Dans $[0; 2\pi]$, les solutions de $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ sont $x = \frac{2\pi}{3}$ et $x = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \right\}$$

On retrouve bien **deux solutions**, et $\frac{2\pi}{3} \approx 2,09$ et $\frac{4\pi}{3} \approx 4,19$ correspondent aux abscisses lues graphiquement : les deux résultats sont cohérents.

Exercice 4 : Formule de duplication

3 points

- 1) Pour tout réel a , $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$, donc $\sin^2(a) = 1 - \cos^2(a)$. En remplaçant dans la formule admise :

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - (1 - \cos^2(a)) = 2 \cos^2(a) - 1 \iff 2 \cos^2(a) = 1 + \cos(2a) \iff \cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$$

- 2) Avec $a = \frac{\pi}{8}$, on a $2a = \frac{\pi}{4}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

Comme $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$, donc :

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

Ensuite $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \frac{2 + \sqrt{2}}{4} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$, et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ pour la même raison :

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}}$$

Vérification à la calculatrice : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 0,924$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 0,383$.