

Exercice 1 : Géométrie repérée

6 points

$M(-1; 3), N(1; -2), P(5; 3)$.

- 1) La médiatrice de $[MN]$ est la droite passant par le milieu I de $[MN]$ et perpendiculaire à (MN) , c'est-à-dire de vecteur normal $\overrightarrow{MN}$.

$$I\left(\frac{-1+1}{2}; \frac{3+(-2)}{2}\right) = I\left(0; \frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} 1 - (-1) \\ -2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Un point $K(x; y)$ appartient à (d) si et seulement si $\overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$, avec $\overrightarrow{IK} \begin{pmatrix} x \\ y - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$:

$$2x - 5\left(y - \frac{1}{2}\right) = 0 \iff 2x - 5y + \frac{5}{2} = 0 \iff 4x - 10y + 5 = 0$$

La médiatrice (d) a bien pour équation $\boxed{4x - 10y + 5 = 0}$.

- 2) De même, le milieu de $[MP]$ est $J\left(\frac{-1+5}{2}; \frac{3+3}{2}\right) = J(2; 3)$ et $\overrightarrow{MP} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de (d') .

$$K(x; y) \in (d') \iff 6(x - 2) + 0 \times (y - 3) = 0 \iff x - 2 = 0.$$

La médiatrice (d') a pour équation $\boxed{x = 2}$.

(Cohérent : M et P ont la même ordonnée, donc $[MP]$ est horizontal et sa médiatrice est verticale.)

- 3) Le centre Ω du cercle circonscrit au triangle MNP est le point d'intersection des médiatrices (d) et (d') . Ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} 4x - 10y + 5 = 0 \\ x = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 8 - 10y + 5 = 0 \\ x = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{13}{10} \\ x = 2 \end{cases}$$

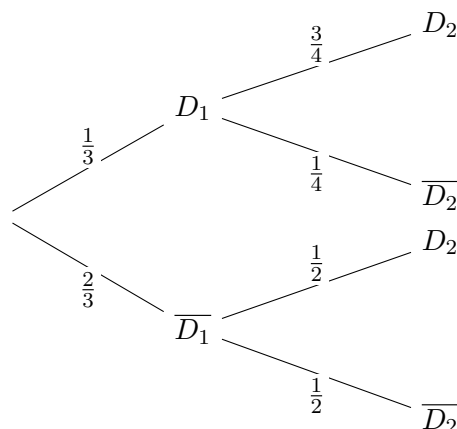
Le centre du cercle circonscrit est $\boxed{\Omega\left(2; \frac{13}{10}\right)}$.

Vérification : $\Omega M^2 = 3^2 + 1,7^2 = 11,89$; $\Omega N^2 = 1^2 + 3,3^2 = 11,89$; $\Omega P^2 = 3^2 + 1,7^2 = 11,89$. Le point Ω est bien équidistant de M, N et P .

Exercice 2 : Déplacements d'un robot

9 points

- 1) D'après l'énoncé : $P(D_1) = \frac{1}{3}$ donc $P(\overline{D_1}) = \frac{2}{3}$; $P_{D_1}(D_2) = \frac{3}{4}$ donc $P_{D_1}(\overline{D_2}) = \frac{1}{4}$; $P_{\overline{D_1}}(\overline{D_2}) = \frac{1}{2}$
donc $P_{\overline{D_1}}(D_2) = \frac{1}{2}$.



2) D_1 et $\overline{D_1}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$p_2 = P(D_2) = P(D_1 \cap D_2) + P(\overline{D_1} \cap D_2) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \boxed{\frac{7}{12}}$$

3) On cherche $P_{D_2}(D_1)$:

$$P_{D_2}(D_1) = \frac{P(D_1 \cap D_2)}{P(D_2)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{12}} = \frac{1}{4} \times \frac{12}{7} = \boxed{\frac{3}{7}}$$

4) Soit $n \geq 1$. D'après l'énoncé, $P_{D_n}(D_{n+1}) = \frac{3}{4}$ et $P_{\overline{D_n}}(D_{n+1}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Avec la formule des probabilités totales (D_n et $\overline{D_n}$ forment une partition) :

$$p_{n+1} = P(D_n \cap D_{n+1}) + P(\overline{D_n} \cap D_{n+1}) = p_n \times \frac{3}{4} + (1 - p_n) \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p_n = \boxed{\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}}$$

5) On part de $p_1 = \frac{1}{3}$ et on applique $n - 1$ fois la relation de récurrence pour atteindre p_n :

```
def suite(n):
    p = 1/3
    for k in range(n-1):
        p = 1/4*p + 1/2
    return p
```

6) Pour tout $n \geq 1$:

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}p_n - \frac{1}{6} = \frac{1}{4} \left(p_n - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{4}u_n$$

La suite (u_n) est donc **géométrique de raison** $q = \boxed{\frac{1}{4}}$, de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$.

7) Pour tout $n \geq 1$, $u_n = u_1 \times q^{n-1}$, soit $u_n = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}$.

Comme $u_n = p_n - \frac{2}{3}$, on a $p_n = u_n + \frac{2}{3}$: $p_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Vérification : $p_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{8}{12} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$.

Exercice 3 : Suite définie par récurrence

5 points

1) $u_1 = \frac{1}{2} \sqrt{u_0^2 + 12} = \frac{1}{2} \sqrt{12} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$ et $u_2 = \frac{1}{2} \sqrt{u_1^2 + 12} = \frac{1}{2} \sqrt{3 + 12} = \frac{\sqrt{15}}{2}$.

2) Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 4 = \left(\frac{1}{2} \sqrt{u_n^2 + 12}\right)^2 - 4 = \frac{u_n^2 + 12}{4} - 4 = \frac{u_n^2}{4} + 3 - 4 = \frac{u_n^2 - 4}{4} = \frac{1}{4} v_n$$

La suite (v_n) est **géométrique de raison** $q = \frac{1}{4}$, de premier terme $v_0 = u_0^2 - 4 = -4$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = -4 \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

4) $v_n = u_n^2 - 4 \iff u_n^2 = v_n + 4 = 4 - 4 \left(\frac{1}{4}\right)^n = 4 \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$.

Comme (u_n) est positive (admis), $u_n = \sqrt{u_n^2}$, donc :

$$u_n = 2 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

Vérification : $u_1 = 2 \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = 2 \sqrt{\frac{3}{4}} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Exercice 4 : Suites arithmétiques et géométriques

7 points

1) a. Pour une suite arithmétique, $u_{10} = u_3 + (10 - 3)r = u_3 + 7r$. Donc :

$$25 = 4 + 7r \iff 7r = 21 \iff r = 3$$

b. Premier terme : $u_0 = u_3 - 3r = 4 - 9 = -5$. Les 10 premiers termes sont $u_0, u_1, \dots, u_9$ avec $u_9 = u_0 + 9r = -5 + 27 = 22$.

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_9 = 10 \times \frac{u_0 + u_9}{2} = 10 \times \frac{-5 + 22}{2} = 10 \times \frac{17}{2} = 85$$

c. On part de $u_0 = -5$; à chaque tour on calcule le terme suivant et on l'ajoute à la somme. Après n tours, S contient $u_0 + u_1 + \dots + u_n$, soit $n + 1$ termes :

```
def somme(n):
    U = -5
    S = -5
    for k in range(n):
        U = U + 3
        S = S + U
    return S
```

- 2) a. Pour une suite géométrique, $v_n = v_0 \times q^n$: $v_n = -1,2^n$ (c'est-à-dire $v_n = -(1,2)^n$).
- b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} - v_n = -1,2^{n+1} + 1,2^n = 1,2^n \times (-1,2 + 1) = -0,2 \times 1,2^n < 0$ car $1,2^n > 0$.
Donc $v_{n+1} < v_n$: la suite (v_n) est **strictement décroissante**.
- c. Somme des termes d'indices 5 à 15 : il y a $15 - 5 + 1 = 11$ termes, premier terme v_5 , raison $q = 1,2 \neq 1$:

$$v_5 + v_6 + \dots + v_{15} = v_5 \times \frac{1 - q^{11}}{1 - q} = -1,2^5 \times \frac{1 - 1,2^{11}}{1 - 1,2} \approx \boxed{-80,00}$$

(Valeur exacte $\approx -80,0005$; à la calculatrice : $-1,2^5 \approx -2,488$ et $\frac{1 - 1,2^{11}}{-0,2} \approx 32,150$.)

Exercice 5 : Indépendance

3 points

D'après l'énoncé : $P(A) = \frac{1}{10} = 0,1$, donc $P(\bar{A}) = 0,9$; $P_A(B) = 0,8$ et $P_{\bar{A}}(B) = 0,15$.

A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ (ou, de façon équivalente, $P_A(B) = P(B)$).

- $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0,1 \times 0,8 = 0,08$.
- Formule des probabilités totales (A et $\bar{A}$ forment une partition) :

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0,08 + 0,9 \times 0,15 = 0,08 + 0,135 = 0,215$$

- $P(A) \times P(B) = 0,1 \times 0,215 = 0,0215$.

Comme $0,08 \neq 0,0215$, les événements A et B **ne sont pas indépendants**.

Autre lecture : $P_A(B) = 0,8 \neq P(B) = 0,215$ – le fait que Jeanne prenne son parapluie change nettement la probabilité qu'il pleuve.