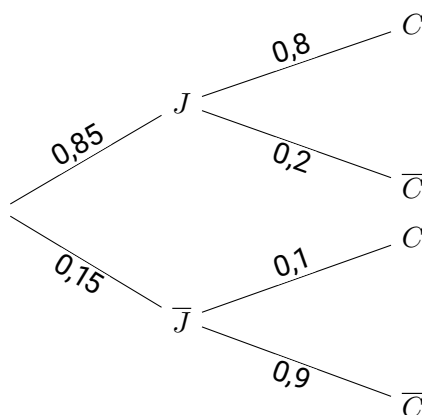


Exercice 1 : Probabilités conditionnelles

6,5 points

D'après l'énoncé : $P(\bar{J}) = 0,15$ (huîtres plates), donc $P(J) = 1 - 0,15 = 0,85$; $P_{\bar{J}}(C) = 0,10$ et $P_J(C) = 0,80$.

a. Arbre pondéré complet :



b. Une huître plate de calibre n°3 correspond à l'évènement $\bar{J} \cap C$. D'après l'arbre :

$$P(\bar{J} \cap C) = P(\bar{J}) \times P_{\bar{J}}(C) = 0,15 \times 0,10 = \boxed{0,015}$$

c. J et $\bar{J}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(J \cap C) + P(\bar{J} \cap C) = 0,85 \times 0,80 + 0,015 = 0,68 + 0,015 = \boxed{0,695}$$

d. On cherche $P_C(\bar{J})$:

$$P_C(\bar{J}) = \frac{P(C \cap \bar{J})}{P(C)} = \frac{0,015}{0,695} \approx \boxed{0,0216}$$

Sachant que l'huître est de calibre n°3, il y a environ 2,16 % de chances que ce soit une huître plate.

e. Les événements C et $\bar{J}$ sont indépendants si et seulement si $P(C \cap \bar{J}) = P(C) \times P(\bar{J})$.

Or $P(C \cap \bar{J}) = 0,015$ et $P(C) \times P(\bar{J}) = 0,695 \times 0,15 = 0,10425$.

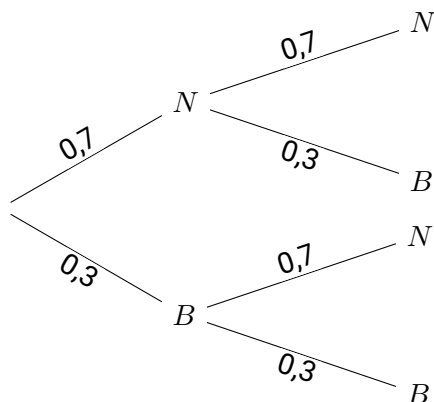
Comme $0,015 \neq 0,10425$, les événements C et $\bar{J}$ **ne sont pas indépendants**.

(Autre justification : $P_{\bar{J}}(C) = 0,10 \neq P(C) = 0,695$.)

Exercice 2 : Tirages avec remise

1,5 point

1) On note N : « la boule tirée est noire » et B : « la boule tirée est blanche ». À chaque tirage, $P(N) = \frac{7}{10} = 0,7$ et $P(B) = \frac{3}{10} = 0,3$. Le tirage se fait avec remise : les probabilités sont les mêmes au second tirage.



- 2) Le joueur gagne si les deux boules sont de couleurs différentes : chemins N puis B , ou B puis N .

$$P(\text{gagner}) = 0,7 \times 0,3 + 0,3 \times 0,7 = 0,21 + 0,21 = \boxed{0,42}$$

Exercice 3 : Lecture graphique

1 point

D'après la courbe de f : f est **décroissante** sur $]0; 2]$ puis **croissante** sur $[2; +\infty[$, avec un minimum en $x = 2$.

Donc f' doit être **négative** sur $]0; 2[$, **nulle** en 2 et **positive** sur $]2; +\infty[$.

- La courbe **a** est positive sur $]0; 1[$: impossible.
- La courbe **b** est positive avant 2 et négative après : ce serait le contraire des variations de f .
- La courbe **c** est négative avant 2, s'annule en 2 et est positive après : elle convient.

La courbe représentative de f' est la courbe c.

Exercice 4 : Coût et bénéfice

8 points

Partie A : Coût de production unitaire

$$U(x) = x - 10 + \frac{900}{x} \text{ sur } [10; 100].$$

- 1) U est dérivable sur $[10; 100]$ comme somme de fonctions dérivables. La dérivée de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$, donc :

$$U'(x) = 1 - 0 + 900 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{900}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} - \frac{900}{x^2} = \boxed{\frac{x^2 - 900}{x^2}}$$

- 2) Le dénominateur x^2 est strictement positif sur $[10; 100]$: le signe de $U'(x)$ est celui de $x^2 - 900 = (x - 30)(x + 30)$.

Sur $[10; 100]$, $x + 30 > 0$; et $x - 30 < 0 \iff x < 30$. Donc :

x	10	30	100
$U'(x)$	–	0	+

$U'(x) < 0$ sur $[10; 30[$, $U'(30) = 0$ et $U'(x) > 0$ sur $]30; 100]$.

3) Calculs : $U(10) = 10 - 10 + 90 = 90$; $U(30) = 30 - 10 + 30 = 50$; $U(100) = 100 - 10 + 9 = 99$.

x	10	30	100
$U'(x)$	–	0	+
$U(x)$	90	50	99

4) D'après le tableau, U est décroissante puis croissante : elle admet un **minimum local** en $x = 30$, égal à $U(30) = 50$.

5) Le coût unitaire est le plus bas pour 30 objets produits par jour; il vaut alors 50 € par objet.

Partie B : Étude du bénéfice

1) La recette pour x objets vendus 100 € l'unité est $100x$. Le coût de production de x objets est $x \times U(x)$ (coût unitaire multiplié par le nombre d'objets). Donc :

$$B(x) = 100x - xU(x) = 100x - x \left(x - 10 + \frac{900}{x} \right) = 100x - x^2 + 10x - 900 = -x^2 + 110x - 900$$

2) B est une fonction polynôme du second degré, dérivable sur $[10; 100]$: $B'(x) = -2x + 110$.

$$B'(x) = 0 \iff -2x + 110 = 0 \iff x = 55 \quad \text{et} \quad B'(x) > 0 \iff -2x + 110 > 0 \iff x < 55$$

Calculs : $B(10) = -100 + 1100 - 900 = 100$; $B(55) = -3025 + 6050 - 900 = 2125$; $B(100) = -10\,000 + 11\,000 - 900 = 100$.

x	10	55	100
$B'(x)$	+	0	–
$B(x)$	100	2 125	100

B est croissante sur $[10; 55]$ et décroissante sur $[55; 100]$.

- 3) Le bénéfice est maximal pour 55 objets produits et vendus par jour; il vaut alors $B(55) =$
2 125 €.

Exercice 5 : Fonction rationnelle

3 points

$f(x) = \frac{5x-1}{3x-2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\}$ (le dénominateur s'annule pour $3x-2=0 \iff x=\frac{2}{3}$).

f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 5x-1$, $u'(x) = 5$, $v(x) = 3x-2$, $v'(x) = 3$. Elle est dérivable sur son ensemble de définition et $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$f'(x) = \frac{5(3x-2) - 3(5x-1)}{(3x-2)^2} = \frac{15x-10-15x+3}{(3x-2)^2} = \frac{-7}{(3x-2)^2}$$

Pour tout $x \neq \frac{2}{3}$, $(3x-2)^2 > 0$ et $-7 < 0$, donc $f'(x) < 0$.

La fonction f est donc **strictement décroissante** sur $\left] -\infty; \frac{2}{3} \right[$ et sur $\left] \frac{2}{3}; +\infty \right[$.

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	—		—
$f(x)$	