Correction Exercice 1 (4 points)

1) Écriture sous la forme 2^k :

- Pour A : On sait que $16 = 2^4$.

$$\begin{aligned} A &= 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \\ &= 2^4 \times \frac{1^5}{2^5} \\ &= 2^4 \times \frac{1}{2^5} \\ &= \frac{2^4}{2^5} \\ &= 2^{4-5} = \boxed{2^{-1}} \end{aligned}$$

- Pour B : On décompose $8 = 2^3$ et $4 = 2^2$.

$$\begin{aligned} B &= \frac{8^5 \times 4^6}{2^8} \\ &= \frac{(2^3)^5 \times (2^2)^6}{2^8} \\ &= \frac{2^{3\times5} \times 2^{2\times6}}{2^8} \\ &= \frac{2^{15} \times 2^{12}}{2^8} \\ &= \frac{2^{15+12}}{2^8} = \frac{2^{27}}{2^8} \\ &= 2^{27-8} = \boxed{2^{19}} \end{aligned}$$

2) Simplification de racines carrées :

- Pour A : On cherche le plus grand carré parfait dans 8 et 32.

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{8} + 5\sqrt{32} - \sqrt{2} \\ &= \sqrt{4 \times 2} + 5\sqrt{16 \times 2} - \sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2} + 5 \times 4\sqrt{2} - \sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2} + 20\sqrt{2} - 1\sqrt{2} \\ &= (2 + 20 - 1)\sqrt{2} \\ &= \boxed{21\sqrt{2}} \end{aligned}$$

- Pour B : On cherche le plus grand carré parfait dans 20 et 125.

$$\begin{aligned}B &= \sqrt{5} + 3\sqrt{20} - 7\sqrt{125} \\ &= \sqrt{5} + 3\sqrt{4 \times 5} - 7\sqrt{25 \times 5} \\ &= 1\sqrt{5} + 3 \times 2\sqrt{5} - 7 \times 5\sqrt{5} \\ &= 1\sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 35\sqrt{5} \\ &= (1 + 6 - 35)\sqrt{5} \\ &= \boxed{-28\sqrt{5}}\end{aligned}$$

Correction Exercice 2 (5 points)

Simplification des calculs :

- **Calcul C :**

$$\begin{aligned}C &= 2\sqrt{48} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{48 \times 3} \\ &= 2\sqrt{144} \quad \text{(144 est un carré parfait)} \\ &= 2 \times 12 = \boxed{24}\end{aligned}$$

- **Calcul D :**

$$\begin{aligned}D &= \sqrt{5} \times \sqrt{10} = \sqrt{50} \\ &= \sqrt{25 \times 2} \\ &= \boxed{5\sqrt{2}}\end{aligned}$$

- **Calcul E :**

$$\begin{aligned}E &= \frac{\sqrt{200}}{5} = \frac{\sqrt{100 \times 2}}{5} \\ &= \frac{10\sqrt{2}}{5} \\ &= \boxed{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

- **Calcul F :**

$$\begin{aligned}F &= \frac{3\sqrt{27}}{6\sqrt{12}} = \frac{3 \times \sqrt{9 \times 3}}{6 \times \sqrt{4 \times 3}} \\ &= \frac{3 \times 3\sqrt{3}}{6 \times 2\sqrt{3}} \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{12\sqrt{3}} \quad \text{(on simplifie par } \sqrt{3}\text{)} \\ &= \frac{9}{12} = \boxed{\frac{3}{4}}\end{aligned}$$

- **Calcul G :** C'est une identité remarquable de la forme $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

$$\begin{aligned} G &= (2\sqrt{5}+1)(2\sqrt{5}-1) \\ &= (2\sqrt{5})^2 - 1^2 \\ &= 2^2 \times (\sqrt{5})^2 - 1 \\ &= 4 \times 5 - 1 \\ &= 20 - 1 = \boxed{19} \end{aligned}$$

Correction Exercice 3 (6 points)

1) Développement :

- $A = (2x+7)(x-3)$

$$\begin{aligned} A &= 2x \times x + 2x \times (-3) + 7 \times x + 7 \times (-3) \\ &= 2x^2 - 6x + 7x - 21 \\ &= \boxed{2x^2 + x - 21} \end{aligned}$$

- $B = (5x-3)^2$ (Identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$)

$$\begin{aligned} B &= (5x)^2 - 2 \times 5x \times 3 + 3^2 \\ &= \boxed{25x^2 - 30x + 9} \end{aligned}$$

2) Factorisation :

- $C = (x-4)(2x-1) + (x-4)(-3x+5)$ On repère le facteur commun $(x-4)$.

$$\begin{aligned} C &= (x-4)\left[(2x-1) + (-3x+5)\right] \\ &= (x-4)(2x-1-3x+5) \\ &= (x-4)(-x+4) \quad \text{ou} \quad \boxed{-(x-4)^2} \end{aligned}$$

- $D = 25 - 9x^2$ (Identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$) Ici $a = 5$ et $b = 3x$.

$$\begin{aligned} D &= 5^2 - (3x)^2 \\ &= \boxed{(5-3x)(5+3x)} \end{aligned}$$

3) Mise au même dénominateur :

- $E = \dfrac{5}{x} + \dfrac{3x-5}{2}$ (Dénominateur commun : $2x$)

$$\begin{aligned} E &= \frac{5 \times 2}{x \times 2} + \frac{x(3x-5)}{2 \times x} \\ &= \frac{10}{2x} + \frac{3x^2 - 5x}{2x} \\ &= \boxed{\frac{3x^2 - 5x + 10}{2x}} \end{aligned}$$

- $F = \dfrac{4x}{x+1} - \dfrac{1}{x}$ (Dénominateur commun : $x(x+1)$)

$$\begin{aligned} F &= \frac{4x \times x}{(x+1) \times x} - \frac{1 \times (x+1)}{x \times (x+1)} \\ &= \frac{4x^2}{x(x+1)} - \frac{x+1}{x(x+1)} \\ &= \frac{4x^2 - (x+1)}{x(x+1)} \\ &= \boxed{\frac{4x^2 - x - 1}{x(x+1)}} \end{aligned}$$

Correction Exercice 4 (5 points)

1) Démontrer que le triangle PFS est rectangle en P.

Calculons le carré des longueurs des côtés :

- $FS^2 = (\sqrt{2a+2})^2 = 2a + 2$.
- $PF^2 = (\sqrt{a} - 1)^2 = a - 2\sqrt{a} + 1$ (Identité remarquable).
- $PS^2 = (\sqrt{a} + 1)^2 = a + 2\sqrt{a} + 1$ (Identité remarquable).

Calculons la somme $PF^2 + PS^2$:

$$\begin{aligned} PF^2 + PS^2 &= (a - 2\sqrt{a} + 1) + (a + 2\sqrt{a} + 1) \\ &= a + a - 2\sqrt{a} + 2\sqrt{a} + 1 + 1 \\ &= 2a + 2 \end{aligned}$$

On constate que $PF^2 + PS^2 = FS^2$. D'après la **réciproque du théorème de Pythagore**, le triangle PFS est rectangle en P.

2) Exprimer l'aire du triangle FPS en fonction de a.

Puisque le triangle est rectangle en P, son aire $\mathcal{A}$ est donnée par la formule :

$$\mathcal{A} = \frac{\text{Base} \times \text{Hauteur}}{2} = \frac{PF \times PS}{2}$$

Remplaçons par les expressions en fonction de a :

$$\mathcal{A} = \frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{2}$$

On reconnaît l'identité remarquable $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ au numérateur :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{(\sqrt{a})^2 - 1^2}{2}\\ &= \frac{a-1}{2}\end{aligned}$$

L'aire du triangle FPS est donc $\boxed{\frac{a-1}{2}}$.