

Exercice 1 : Calculs numériques (4 points)

1. On met les fractions au même dénominateur (ici 6) :

$$\begin{aligned}\frac{3}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} &= \frac{3 \times 3}{2 \times 3} - \frac{1 \times 2}{3 \times 2} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{9}{6} - \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{9 - 2 + 1}{6} \\ &= \frac{8}{6} = \boxed{\frac{4}{3}}\end{aligned}$$

2. On calcule séparément le numérateur et le dénominateur :

$$\begin{aligned}\text{Numérateur : } 3 - \frac{1}{9} &= \frac{27}{9} - \frac{1}{9} = \frac{26}{9} \\ \text{Dénominateur : } \frac{4}{6} - \frac{5}{9} &= \frac{2}{3} - \frac{5}{9} = \frac{6}{9} - \frac{5}{9} = \frac{1}{9}\end{aligned}$$

D'où le calcul final (diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse) :

$$\frac{3 - \frac{1}{9}}{\frac{4}{6} - \frac{5}{9}} = \frac{\frac{26}{9}}{\frac{1}{9}} = \frac{26}{9} \times \frac{9}{1} = \boxed{26}$$

3. On respecte la priorité des parenthèses :

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{5} - \frac{2}{15}\right) \times \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) &= \left(\frac{9}{15} - \frac{2}{15}\right) \times \left(\frac{2}{12} + \frac{3}{12}\right) \\ &= \frac{7}{15} \times \frac{5}{12} \\ &= \frac{7 \times 5}{15 \times 12} = \frac{7 \times \cancel{5}}{3 \times \cancel{5} \times 12} = \boxed{\frac{7}{36}}\end{aligned}$$

4. On commence par le calcul dans la parenthèse :

$$\begin{aligned}\frac{3}{8} \times \left(\frac{1}{4} - 1\right) &= \frac{3}{8} \times \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{4}\right) \\ &= \frac{3}{8} \times \left(-\frac{3}{4}\right) \\ &= -\frac{3 \times 3}{8 \times 4} = \boxed{-\frac{9}{32}}\end{aligned}$$

Exercice 2 : Écriture fractionnaire (3 points)

1. Pour A , le dénominateur commun est 2 :

$$A = x + \frac{x-2}{2} = \frac{2x}{2} + \frac{x-2}{2} = \frac{2x+x-2}{2} = \boxed{\frac{3x-2}{2}}$$

2. Pour B , le dénominateur commun est 24 (plus petit multiple commun de 6 et 8). Attention au signe moins devant la deuxième fraction qui s'applique à tout le numérateur :

$$\begin{aligned} B &= \frac{3x+2}{6} - \frac{5x-1}{8} \\ &= \frac{4(3x+2)}{24} - \frac{3(5x-1)}{24} \\ &= \frac{12x+8-(15x-3)}{24} \\ &= \frac{12x+8-15x+3}{24} = \boxed{\frac{-3x+11}{24}} \end{aligned}$$

3. Pour C , le dénominateur commun est $x(x+1)$:

$$\begin{aligned} C &= \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x} \\ &= \frac{2x}{x(x+1)} - \frac{3(x+1)}{x(x+1)} \\ &= \frac{2x-(3x+3)}{x(x+1)} \\ &= \frac{2x-3x-3}{x(x+1)} = \boxed{\frac{-x-3}{x(x+1)}} \end{aligned}$$

Exercice 3 : Écriture scientifique (2 points)

1. On regroupe les nombres et les puissances de 10 :

$$\begin{aligned} A &= \frac{2 \times (10^4)^5 \times 6 \times 10^{-4}}{4 \times 10^9} = \frac{2 \times 6}{4} \times \frac{10^{20} \times 10^{-4}}{10^9} \\ &= 3 \times \frac{10^{20-4}}{10^9} = 3 \times \frac{10^{16}}{10^9} \\ &= 3 \times 10^{16-9} = \boxed{3 \times 10^7} \end{aligned}$$

2. De même pour B :

$$\begin{aligned} B &= \frac{32 \times 10^3 \times 5 \times (10^{-2})^3}{4 \times 10^{-2}} = \frac{32 \times 5}{4} \times \frac{10^3 \times 10^{-6}}{10^{-2}} \\ &= (8 \times 5) \times \frac{10^{-3}}{10^{-2}} \\ &= 40 \times 10^{-3-(-2)} = 40 \times 10^{-1} \\ &= 4,0 \times 10^1 \times 10^{-1} = \boxed{4 \times 10^0} \quad (\text{ou simplement } 4) \end{aligned}$$

Exercice 4 : Racines carrées (3 points)

1. On simplifie les racines en faisant apparaître des carrés parfaits : $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$ et $\sqrt{300} = \sqrt{100 \times 3} = 10\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} 3\sqrt{3} + 2\sqrt{12} - \sqrt{300} &= 3\sqrt{3} + 2(2\sqrt{3}) - 10\sqrt{3} \\ &= 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 10\sqrt{3} \\ &= (3 + 4 - 10)\sqrt{3} = \boxed{-3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

2. On simplifie : $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$ et $\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{20} - 3\sqrt{5} + 3\sqrt{45} &= 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 3(3\sqrt{5}) \\ &= 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 9\sqrt{5} \\ &= (2 - 3 + 9)\sqrt{5} = \boxed{8\sqrt{5}} \end{aligned}$$

3. On développe l'identité remarquable $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:

$$\begin{aligned} (4 - 2\sqrt{3})^2 &= 4^2 - 2 \times 4 \times 2\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2 \\ &= 16 - 16\sqrt{3} + (4 \times 3) \\ &= 16 - 16\sqrt{3} + 12 = \boxed{28 - 16\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Exercice 5 : Équations (3 points)

1. Résolution d'une équation linéaire :

$$7x - (x + 2) = 2x + 3 \iff 7x - x - 2 = 2x + 3$$

$$\iff 6x - 2 = 2x + 3$$

$$\iff 6x - 2x = 3 + 2$$

$$\iff 4x = 5 \iff \boxed{x = \frac{5}{4}}$$

L'ensemble des solutions est $S = \left\{ \frac{5}{4} \right\}$.

2. Égalité de deux fractions (produit en croix) :

$$\frac{2x + 1}{3} = \frac{3 - x}{2} \iff 2(2x + 1) = 3(3 - x)$$

$$\iff 4x + 2 = 9 - 3x$$

$$\iff 4x + 3x = 9 - 2$$

$$\iff 7x = 7 \iff \boxed{x = 1}$$

L'ensemble des solutions est $S = \{1\}$.

3. Équation du type $X^2 = a$ avec $a > 0$:

$$(3x + 2)^2 = 9 \iff 3x + 2 = \sqrt{9} \text{ ou } 3x + 2 = -\sqrt{9}$$

$$\iff 3x + 2 = 3 \text{ ou } 3x + 2 = -3$$

$$\iff 3x = 1 \text{ ou } 3x = -5$$

$$\iff \boxed{x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = -\frac{5}{3}}$$

L'ensemble des solutions est $S = \left\{ -\frac{5}{3}; \frac{1}{3} \right\}$.

Exercice 6 : Python et fonctions (5 points)

(a) **Exécution manuelle de l'algorithme pour $x = 2$:**

- $a = 5*2 - 2 \rightarrow a = 8$
- $b = 4*2*2 \rightarrow b = 16$
- $c = 8*2 - 16 \rightarrow c = 64 - 16 = 48$

La valeur renvoyée est 48.

(b) **Expression de la fonction f :** On traduit les instructions Python en langage algébrique :

- a correspond à $5x - 2$.
- b correspond à $4x^2$.
- c correspond à $a^2 - b$, soit $(5x - 2)^2 - 4x^2$.

Donc : $f(x) = (5x - 2)^2 - 4x^2$.

(c) **Développement :** On développe l'identité remarquable $(5x - 2)^2$:

$$\begin{aligned} f(x) &= (25x^2 - 20x + 4) - 4x^2 \\ &= 25x^2 - 4x^2 - 20x + 4 \\ &= 21x^2 - 20x + 4 \end{aligned}$$

On retrouve bien l'expression : $f(x) = 21x^2 - 20x + 4$.

(d) **Factorisation :** On utilise la forme initiale $f(x) = (5x - 2)^2 - 4x^2$ qui est de la forme $A^2 - B^2$ avec $A = 5x - 2$ et $B = 2x$.

$$\begin{aligned} f(x) &= [(5x - 2) - 2x] \times [(5x - 2) + 2x] \\ &= (5x - 2 - 2x)(5x - 2 + 2x) \\ &= (3x - 2)(7x - 2) \end{aligned}$$

La forme factorisée est $f(x) = (3x - 2)(7x - 2)$.

(e) **Utilisation des formes adaptées :**

- **Retrouver le résultat de la question 6a :** On utilise la forme développée (ou factorisée) pour calculer $f(2)$:

$$f(2) = 21(2)^2 - 20(2) + 4 = 21 \times 4 - 40 + 4 = 84 - 40 + 4 = 48.$$

On retrouve bien le résultat 48.

- **Résoudre** $f(x) = 0$: On utilise la **forme factorisée** (équation produit-nul) :

$$\begin{aligned}(3x - 2)(7x - 2) = 0 &\iff 3x - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad 7x - 2 = 0 \\ &\iff 3x = 2 \quad \text{ou} \quad 7x = 2 \\ &\iff x = \frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{2}{7}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $S_1 = \left\{ \frac{2}{7}; \frac{2}{3} \right\}$.

- **Résoudre** $f(x) = 4$: On utilise la **forme développée** :

$$\begin{aligned}21x^2 - 20x + 4 = 4 &\iff 21x^2 - 20x = 0 \\ &\iff x(21x - 20) = 0 \quad (\text{par factorisation par } x)\end{aligned}$$

C'est une équation produit-nul :

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad 21x - 20 = 0 \iff 21x = 20 \iff x = \frac{20}{21}$$

L'ensemble des solutions est $S_2 = \left\{ 0; \frac{20}{21} \right\}$.