

Correction Partie A : Méli Mélo de techniques

1. Avec des projetés

a. Calculs de produits scalaires par projection orthogonale :

Pour calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, on projette l'un des vecteurs sur la droite portant l'autre.

- $\vec{CB} \cdot \vec{CE}$: La droite (CB) est verticale. Le projeté orthogonal de E sur la droite (CB) est le point B (car $(EB) \perp (CB)$). Donc $\vec{CB} \cdot \vec{CE} = \vec{CB} \cdot \vec{CB} = CB^2$. D'après la figure, $CB = 5$.

$$\vec{CB} \cdot \vec{CE} = 5^2 = \boxed{25}$$

- $\vec{AE} \cdot \vec{ED}$: La droite (AE) est horizontale. Le projeté orthogonal de D sur (AE) est le point A (car $(DA) \perp (AB)$). Donc $\vec{AE} \cdot \vec{ED} = \vec{AE} \cdot \vec{EA}$. Les vecteurs sont colinéaires et de sens contraires. $AE = 3$ et $EA = 3$.

$$\vec{AE} \cdot \vec{ED} = -AE \times EA = -3 \times 3 = \boxed{-9}$$

- $\vec{AE} \cdot \vec{AB}$: Les points A, E, B sont alignés dans cet ordre. Les vecteurs sont colinéaires et de même sens. $AE = 3$ et $AB = AE + EB = 3 + 4 = 7$.

$$\vec{AE} \cdot \vec{AB} = AE \times AB = 3 \times 7 = \boxed{21}$$

- $\vec{EA} \cdot \vec{EB}$: Les vecteurs sont colinéaires et de sens contraires. $EA = 3$ et $EB = 4$.

$$\vec{EA} \cdot \vec{EB} = -EA \times EB = -3 \times 4 = \boxed{-12}$$

- $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$: Le triangle ABC est rectangle en B (car (AB) horizontale et (BC) verticale). Les vecteurs sont orthogonaux.

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \boxed{0}$$

b. Calcul de $\vec{ED} \cdot \vec{EC}$ par décomposition :

On décompose les vecteurs en utilisant les points de la base (AB) grâce à la relation de Chasles :

$$\vec{ED} = \vec{EA} + \vec{AD} \quad \text{et} \quad \vec{EC} = \vec{EB} + \vec{BC}$$

On développe le produit scalaire (distributivité) :

$$\vec{ED} \cdot \vec{EC} = (\vec{EA} + \vec{AD}) \cdot (\vec{EB} + \vec{BC})$$

$$\vec{ED} \cdot \vec{EC} = \vec{EA} \cdot \vec{EB} + \vec{EA} \cdot \vec{BC} + \vec{AD} \cdot \vec{EB} + \vec{AD} \cdot \vec{BC}$$

Analysons chaque terme :

- $\vec{EA} \cdot \vec{EB}$: vecteurs colinéaires de sens contraires.

$$(-EA \times EB) = -3 \times 4 = -12.$$

- $\vec{EA} \cdot \vec{BC}$: vecteurs orthogonaux (horizontale contre verticale), donc 0.
- $\vec{AD} \cdot \vec{EB}$: vecteurs orthogonaux (verticale contre horizontale), donc 0.
- $\vec{AD} \cdot \vec{BC}$: vecteurs colinéaires de même sens (tous deux vers le haut).
 $(AD \times BC) = 2 \times 5 = 10.$

Finalement :

$$\vec{ED} \cdot \vec{EC} = -12 + 0 + 0 + 10 = \boxed{-2}$$

c. **L'angle $\widehat{DEC}$ est-il droit?** L'angle est droit si et seulement si le produit scalaire des vecteurs directeurs est nul. Or, nous avons trouvé $\vec{ED} \cdot \vec{EC} = -2 \neq 0$. **Conclusion :** L'angle $\widehat{DEC}$ n'est pas droit.

2. Avec le cosinus

Dans le triangle MNP isocèle en P , on a $PM = PN$. Notons $x = PN$. On sait que $\vec{PN} \cdot \vec{PM} = PN \times PM \times \cos(\widehat{MPN})$.

$$-8 = x \times x \times \cos(120^\circ)$$

On sait que $\cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}$.

$$-8 = x^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \iff x^2 = 16$$

Comme une longueur est positive, $x = 4$. **Conclusion :** $\boxed{PN = 4}$.

3. Avec des coordonnées

$A(-2; 0)$, $B(1; -2)$ et $C(-1; -4)$.

a. **Calculs dans le triangle ABC :**

- Vecteurs : $\vec{CA} \begin{pmatrix} -2 - (-1) \\ 0 - (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{CB} \begin{pmatrix} 1 - (-1) \\ -2 - (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- Produit scalaire : $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = (-1 \times 2) + (4 \times 2) = -2 + 8 = \boxed{6}$.
- Normes : $CA = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$. $CB = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Mesure de l'angle $\widehat{ACB}$: On utilise la formule : $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = CA \times CB \times \cos(\widehat{ACB})$.

$$6 = \sqrt{17} \times \sqrt{8} \times \cos(\widehat{ACB})$$

$$\iff \cos(\widehat{ACB}) = \frac{6}{\sqrt{136}}$$

$$\iff \widehat{ACB} = \arccos\left(\frac{6}{\sqrt{136}}\right) \approx \boxed{59^\circ}$$

b. **Point $M(0; y)$ pour un angle aigu :** L'angle $\widehat{AMB}$ est aigu si et seulement si $\vec{MA} \cdot \vec{MB} > 0$.

$$\vec{MA} \begin{pmatrix} -2 - 0 \\ 0 - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{MB} \begin{pmatrix} 1 - 0 \\ -2 - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 - y \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (-2 \times 1) + (-y)(-2 - y) = -2 + 2y + y^2$$

On cherche y tel que $y^2 + 2y - 2 > 0$.

Calcul du discriminant $\Delta = 2^2 - 4(1)(-2) = 4 + 8 = 12 > 0$.

Racines : $y_1 = \frac{-2 - \sqrt{12}}{2} = -1 - \sqrt{3}$ et $y_2 = -1 + \sqrt{3}$.

Un polynôme du second degré est du signe de a (ici positif) à l'extérieur des racines.

Conclusion : L'angle est aigu pour $y \in]-\infty; -1 - \sqrt{3}[\cup]-1 + \sqrt{3}; +\infty[$.

4. Avec les normes

On utilise la relation d'Al-Kashi (ou développement de $\|\overrightarrow{BC}\|^2$) :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow 6^2 = 3^2 + 5^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow 36 = 9 + 25 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow 36 = 34 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow 2 = -2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1$$

Correction Partie B : Les applications

1. Al Kashi

a. **Calcul des angles du triangle MNP ($MN = 5, MP = 3, PN = 7$)**

Calcul de l'angle $\widehat{M}$: $PN^2 = MN^2 + MP^2 - 2MN \times MP \times \cos(\widehat{M})$

$$\Leftrightarrow 7^2 = 5^2 + 3^2 - 2(5)(3) \cos(\widehat{M}) \Leftrightarrow 49 = 25 + 9 - 30 \cos(\widehat{M})$$

$$\Leftrightarrow 49 = 34 - 30 \cos(\widehat{M}) \Leftrightarrow 15 = -30 \cos(\widehat{M}) \Leftrightarrow \cos(\widehat{M}) = -0,5$$

Donc $\widehat{M} = 120^\circ$.

Calcul de l'angle $\widehat{N}$: $MP^2 = MN^2 + NP^2 - 2MN \times NP \times \cos(\widehat{N})$

$$\Leftrightarrow 3^2 = 5^2 + 7^2 - 2(5)(7) \cos(\widehat{N}) \Leftrightarrow 9 = 25 + 49 - 70 \cos(\widehat{N})$$

$$\Leftrightarrow 9 = 74 - 70 \cos(\widehat{N}) \Leftrightarrow -65 = -70 \cos(\widehat{N}) \Leftrightarrow \cos(\widehat{N}) = \frac{65}{70}$$

Donc $\widehat{N} \approx 22^\circ$.

Calcul de l'angle $\hat{P}$: $\hat{P} = 180 - (120 + 22) \approx \boxed{38^\circ}$.

b. **Calcul de longueur EF :**

$$\begin{aligned} EF^2 &= GE^2 + GF^2 - 2GE \times GF \times \cos(\hat{G}) \\ \iff EF^2 &= 7^2 + 10^2 - 2(7)(10) \cos(35^\circ) = 49 + 100 - 140 \cos(35^\circ) \\ \iff EF^2 &= 149 - 140 \cos(35^\circ) \approx 34,31 \end{aligned}$$

Donc $EF = \sqrt{34,31} \approx \boxed{5,9}$.

2. Equations de droites

Droite D : $2x - 3y + 1 = 0$.

1. On lit directement sur l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$:

- Un vecteur normal : $\vec{n}(a; b)$ soit $\boxed{\vec{n}(2; -3)}$.
- Un vecteur directeur : $\vec{v}(-b; a)$ soit $\boxed{\vec{v}(3; 2)}$.

2. **Droite d parallèle à D passant par $A(-2; 1)$.**

Si $d // D$, alors elles ont le même vecteur normal $\vec{n}(2; -3)$.

L'équation de d est de la forme : $2x - 3y + c = 0$.

$$A \in d \iff 2(-2) - 3(1) + c = 0 \iff -4 - 3 + c = 0 \iff c = 7.$$

L'équation de d est : $\boxed{2x - 3y + 7 = 0}$.

3. **Droite d' perpendiculaire à D passant par $B(2; 0)$.**

Si $d' \perp D$, alors un vecteur directeur $\vec{v}(3; 2)$ de D est un vecteur **normal** à d' .

L'équation de d' est de la forme :

$$3x + 2y + k = 0. B \in d' \iff 3(2) + 2(0) + k = 0 \iff 6 + k = 0 \iff k = -6.$$

L'équation de d' est : $\boxed{3x + 2y - 6 = 0}$.

3. Cercles

1. Cercle C de centre $E(-2; 5)$ et rayon $R = 8$.

a. Équation : $(x - x_E)^2 + (y - y_E)^2 = R^2$

$$(x - (-2))^2 + (y - 5)^2 = 8^2 \iff \boxed{(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 64}$$

b. Test du point $F(5; 1)$. Calculons la distance $EF^2 = (5 - (-2))^2 + (1 - 5)^2 = 7^2 + (-4)^2 = 49 + 16 = 65$. Comme $65 \neq 64$ (le carré du rayon), **le point F n'appartient pas au cercle.**

2. Équation : $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 2 = 0$. Forme canonique : $(x^2 - 6x) + (y^2 + 2y) + 2 = 0$

$$(x - 3)^2 - 9 + (y + 1)^2 - 1 + 2 = 0$$

$$\iff (x - 3)^2 + (y + 1)^2 - 8 = 0$$

$$\iff (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 8$$

C'est un cercle de centre $\Omega(3; -1)$ et de rayon $R = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

4. Diamètre

Soit $A(-3; 8)$ et $B(2; -4)$. Cercle de diamètre $[AB]$.

Méthode 1 : Géométrie (Centre et Rayon)

Le centre Ω est le milieu de $[AB]$: $\Omega\left(\frac{-3+2}{2}; \frac{8-4}{2}\right) = \Omega(-0,5; 2)$.

Le rayon est $R = \frac{AB}{2}$.

$$AB^2 = (2 - (-3))^2 + (-4 - 8)^2 = 5^2 + (-12)^2 = 25 + 144 = 169.$$

$$AB = \sqrt{169} = 13, \text{ donc } R = 6,5.$$

$$\text{Équation : } (x + 0,5)^2 + (y - 2)^2 = 6,5^2.$$

Méthode 2 : Produit scalaire

Un point $M(x; y)$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$ ssi $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

$\overrightarrow{MA}(-3 - x; 8 - y)$ et $\overrightarrow{MB}(2 - x; -4 - y)$.

$$(-3 - x)(2 - x) + (8 - y)(-4 - y) = 0$$

$$\iff -6 + 3x - 2x + x^2 + (-32 - 8y + 4y + y^2) = 0$$

$$\iff x^2 + x - 6 + y^2 - 4y - 32 = 0$$

$$\iff \boxed{x^2 + y^2 + x - 4y - 38 = 0}$$