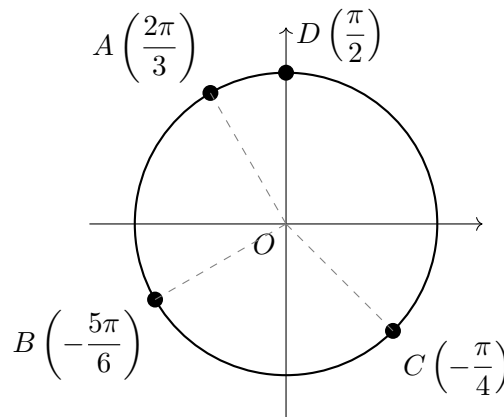


**Exercice 1**
**11 points**
**1) Placement des points sur le cercle trigonométrique.**

- Le point  $A \left( \frac{2\pi}{3} \right)$  se place trivialement.
- Le point  $B \left( -\frac{5\pi}{6} \right)$  se place trivialement.
- Pour le point  $C$  : on décompose  $-\frac{25\pi}{4} = \frac{-24\pi - \pi}{4} = -6\pi - \frac{\pi}{4}$ .  
Comme  $-6\pi$  correspond à  $-3$  tours complets (multiple de  $2\pi$ ), le point  $C$  a pour mesure principale  $-\frac{\pi}{4}$ .
- Pour le point  $D$  : on décompose  $\frac{41\pi}{2} = \frac{40\pi + \pi}{2} = 20\pi + \frac{\pi}{2}$ .  
Comme  $20\pi$  correspond à  $10$  tours complets, le point  $D$  a pour mesure principale  $\frac{\pi}{2}$ .


**2) Calculons la différence entre les deux réels :**

$$\frac{16\pi}{3} - \left( -\frac{5\pi}{3} \right) = \frac{16\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = \frac{21\pi}{3} = 7\pi$$

La différence vaut  $7\pi$ , ce qui n'est pas un multiple pair de  $\pi$  (ce n'est pas un multiple de  $2\pi$ ).

**Conclusion** : Les deux réels **n'ont pas** le même point image.

**3) On sait que pour tout réel  $a$ ,  $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$ . On remplace par la valeur de l'énoncé :**

$$\cos^2(a) + \left( \frac{4}{5} \right)^2 = 1 \iff \cos^2(a) + \frac{16}{25} = 1 \iff \cos^2(a) = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

Ainsi,  $\cos(a) = \frac{3}{5}$  ou  $\cos(a) = -\frac{3}{5}$ .

Or, on sait que  $a \in \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right]$ , un intervalle sur lequel la fonction cosinus est positive.

On en déduit que  $\boxed{\cos(a) = \frac{3}{5}}$ .

**4) a. Dans  $[0; 2\pi[$ , l'équation  $\sin(x) = \frac{1}{2}$  a pour solutions :  $\boxed{S = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right\}}$ .**

b. Dans  $[-\pi; \pi]$ , l'équation  $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  a pour solutions :  $S = \left\{ -\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\}$ .

5) a. **Inéquation** :  $\cos(x) > \frac{1}{2}$  sur  $[0; 2\pi]$ .

Graphiquement, on cherche la zone de l'axe des abscisses strictement supérieure à 0,5.

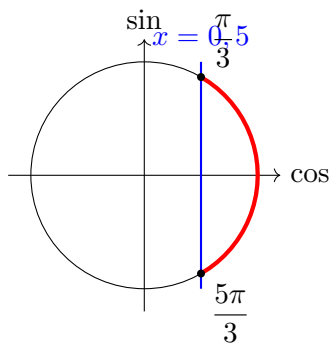
Sur  $[0; 2\pi]$ , l'ensemble solution est :  $S = \left[ 0; \frac{\pi}{3} \right[ \cup \left] \frac{5\pi}{3}; 2\pi \right[$

b. **Inéquation** :  $\sqrt{2}\sin(x) + 1 \leq 0$  sur  $[-\pi; \pi]$ .

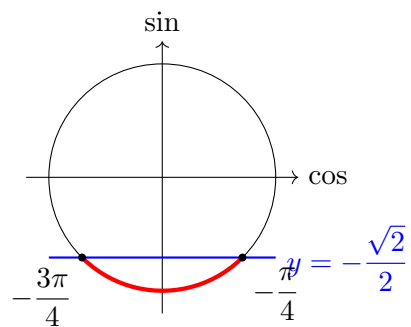
Cette inéquation équivaut à :  $\sqrt{2}\sin(x) \leq -1 \iff \sin(x) \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \iff \sin(x) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Graphiquement, on cherche la partie inférieure du cercle (ordonnée en-dessous de  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ).

Sur  $[-\pi; \pi]$ , l'ensemble solution est :  $S = \left[ -\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4} \right]$



(a) Question 5.a :  $\cos(x) > \frac{1}{2}$



(b) Question 5.b :  $\sin(x) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

## Exercice 2

6 points

Soit  $f(x) = 1 - 4\cos(5x)$ .

1) Calculons les images :

$$f\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - 4\cos\left(5 \times \frac{\pi}{5}\right) = 1 - 4\cos(\pi)$$

Or  $\cos(\pi) = -1$ , donc :

$$f\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - 4 \times (-1) = 1 + 4 = \boxed{5}$$

$$f\left(\frac{\pi}{10}\right) = 1 - 4\cos\left(5 \times \frac{\pi}{10}\right) = 1 - 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Or  $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , donc :

$$f\left(\frac{\pi}{10}\right) = 1 - 4 \times 0 = \boxed{1}$$

2) L'ensemble de définition de  $f$  est  $\mathbb{R}$ , qui est centré en 0. Pour tout réel  $x$  :

$$f(-x) = 1 - 4 \cos(5(-x)) = 1 - 4 \cos(-5x)$$

Comme la fonction cosinus est paire,  $\cos(-5x) = \cos(5x)$ . Ainsi :

$$f(-x) = 1 - 4 \cos(5x) = f(x)$$

La fonction  $f$  est donc paire.

3) Pour tout réel  $x$  :

$$f\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) = 1 - 4 \cos\left(5\left(x + \frac{2\pi}{5}\right)\right) = 1 - 4 \cos\left(5x + 5 \times \frac{2\pi}{5}\right)$$

$$f\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) = 1 - 4 \cos(5x + 2\pi)$$

La fonction cosinus étant périodique de période  $2\pi$ , on a  $\cos(5x + 2\pi) = \cos(5x)$ . Ainsi :

$$f\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) = 1 - 4 \cos(5x) = f(x)$$

La fonction  $f$  est bien périodique de période  $\frac{2\pi}{5}$ .

4) On sait que pour tout réel  $X$ ,  $-1 \leq \cos(X) \leq 1$ . On a donc pour tout réel  $x$  :

$$-1 \leq \cos(5x) \leq 1$$

On multiplie par  $-4$  en inversant le sens de l'inégalité car  $-4 < 0$  :

$$4 \geq -4 \cos(5x) \geq -4 \iff -4 \leq -4 \cos(5x) \leq 4$$

On ajoute 1 partout :

$$-4 + 1 \leq 1 - 4 \cos(5x) \leq 4 + 1$$

$$\boxed{-3 \leq f(x) \leq 5}$$

**Exercice 3**
**3 points**

1) Résolvons sur  $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$  l'inéquation  $f(x) > g(x)$  :

$$\frac{2}{x+3} > -x$$

$$\frac{2}{x+3} + x > 0$$

$$\frac{2}{x+3} + \frac{x(x+3)}{x+3} > 0$$

$$\frac{2 + x^2 + 3x}{x+3} > 0$$

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x+3} > 0$$

Étudions le signe du numérateur : c'est un trinôme du second degré de la forme  $ax^2 + bx + c$ .

Ses racines évidentes (ou avec  $\Delta = 9 - 8 = 1$ ) sont  $x_1 = -1$  et  $x_2 = -2$ .

Étudions le signe du dénominateur :  $x + 3 = 0 \iff x = -3$ .

Faisons un tableau de signes :

$x$	$-\infty$	$-3$	$-2$	$-1$	$+\infty$		
Signe de $x^2 + 3x + 2$	+	0	+	0	-	0	+
Signe de $x + 3$	-	0	+	+	+	+	+
Signe du quotient	-	0	+	0	-	0	+

On cherche quand le quotient est strictement positif. D'après le tableau de signe :

$$S = ]-3; -2[ \cup ]-1; +\infty[$$

2) On peut en déduire que sur les intervalles  $] -3; -2[$  et  $] -1; +\infty[$ , la courbe  $C_f$  est **strictement au-dessus** de la courbe  $C_g$ . Ailleurs (hors  $x = -3$ ),  $C_f$  est au-dessous ou coupe  $C_g$ .

**Exercice 4**
**6 points**

1) L'aire totale  $A_{tot}$  du grand disque de diamètre  $AB = 4$  cm (donc de rayon 2 cm) est :

$$A_{tot} = \pi \times 2^2 = 4\pi$$

La partie grisée est égale à l'aire totale moins l'aire des deux petits disques blancs.  
 Soit  $A_1$  l'aire du disque blanc de diamètre  $AM = x$ . Son rayon est  $\frac{x}{2}$ .

$$A_1 = \pi \times \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \pi \times \frac{x^2}{4} = \frac{\pi}{4}x^2$$

Soit  $A_2$  l'aire du disque blanc de diamètre  $MB = 4 - x$ . Son rayon est  $\frac{4-x}{2}$ .

$$A_2 = \pi \times \left(\frac{4-x}{2}\right)^2 = \pi \times \frac{16-8x+x^2}{4}$$

Calculons l'aire de la partie grisée  $A(x)$  :

$$A(x) = A_{tot} - (A_1 + A_2)$$

$$A(x) = 4\pi - \left(\frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi(16-8x+x^2)}{4}\right)$$

$$A(x) = \frac{16\pi}{4} - \frac{\pi(x^2 + 16 - 8x + x^2)}{4}$$

$$A(x) = \frac{\pi}{4}(16 - (2x^2 - 8x + 16))$$

$$A(x) = \frac{\pi}{4}(-2x^2 + 8x) = \frac{\pi}{4} \times 2(-x^2 + 4x)$$

$$A(x) = \boxed{-\frac{\pi}{2}(x^2 - 4x)}$$

2) On cherche le maximum de l'aire.  $A(x)$  s'écrit comme un trinôme  $-\frac{\pi}{2}x^2 + 2\pi x$ . Avec  $a = -\frac{\pi}{2} < 0$ , la fonction est représentée par une parabole tournée vers le bas. Son maximum est atteint pour :

$$x = \alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-2\pi}{2 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-2\pi}{-\pi} = 2$$

L'aire maximale est atteinte pour  $\boxed{x = 2 \text{ cm}}$ , c'est-à-dire quand  $M$  est au **milieu** du segment  $[AB]$ .

La valeur de cette aire est :

$$A(2) = -\frac{\pi}{2}(2^2 - 4 \times 2) = -\frac{\pi}{2}(4 - 8) = -\frac{\pi}{2} \times (-4) = \boxed{2\pi \text{ cm}^2}$$

3) On veut que la partie grisée représente au moins un quart de la surface du pendentif, soit :

$$A(x) \geq \frac{1}{4} \times A_{tot}$$

$$-\frac{\pi}{2}(x^2 - 4x) \geq \frac{1}{4} \times 4\pi$$

$$-\frac{\pi}{2}(x^2 - 4x) \geq \pi$$

On divise par  $\pi$  et on multiplie par  $-2$  (en changeant le sens de l'inégalité car on multiplie par un négatif) :

$$x^2 - 4x \leq -2$$

$$\boxed{-x^2 + 4x - 2 \geq 0}$$

4) Résolvons  $-x^2 + 4x - 2 \geq 0$ . Calculons le discriminant :

$$\Delta = 4^2 - 4(-1)(-2) = 16 - 8 = 8 = (2\sqrt{2})^2$$

Le trinôme a deux racines distinctes car  $\Delta > 0$  :

$$x_1 = \frac{-4 - 2\sqrt{2}}{-2} = 2 + \sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4 + 2\sqrt{2}}{-2} = 2 - \sqrt{2}$$

Comme  $a = -1 < 0$ , le trinôme est positif entre les racines. L'ensemble solution de l'inéquation est l'intervalle :

$$\boxed{x \in [2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}]}$$

Comme  $x$  est une distance sur  $[0; 4]$ , cette condition est parfaitement réalisable, avec  $2 - \sqrt{2} \approx 0,59$  cm et  $2 + \sqrt{2} \approx 3,41$  cm.

## Exercice 5

4 points

L'équation est (E) :  $2 \cos^4(x) + 3 \sin^2(x) - 2 = 0$ .

1) On sait que  $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \iff \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ . On remplace dans (E) :

$$2 \cos^4(x) + 3(1 - \cos^2(x)) - 2 = 0$$

$$2 \cos^4(x) + 3 - 3 \cos^2(x) - 2 = 0$$

$$2 \cos^4(x) - 3 \cos^2(x) + 1 = 0$$

En posant  $X = \cos^2(x)$ , on a  $X^2 = \cos^4(x)$ . L'équation devient bien :

$$\boxed{2X^2 - 3X + 1 = 0}$$

2) Résolvons d'abord l'équation d'inconnue  $X$  :  $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1$ .

Il y a deux solutions pour  $X$  :

$$X_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{3+1}{4} = 1$$

On revient à  $x$  :

- **Cas 1** :  $X = 1 \iff \cos^2(x) = 1$ . Donc  $\cos(x) = 1$  ou  $\cos(x) = -1$ .

Dans l'intervalle  $[0; 2\pi[$ , cela donne les solutions  $x = 0$  et  $x = \pi$ .

- **Cas 2** :  $X = \frac{1}{2} \iff \cos^2(x) = \frac{1}{2}$ . Donc  $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ou  $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Dans l'intervalle  $[0; 2\pi[$ , pour  $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , les solutions sont  $x = \frac{\pi}{4}$  et  $x = \frac{7\pi}{4}$ .

Pour  $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , les solutions sont  $x = \frac{3\pi}{4}$  et  $x = \frac{5\pi}{4}$ .

Finalement, l'ensemble des solutions de  $(E)$  dans  $[0; 2\pi[$  est :

$$S = \left\{ 0; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \pi; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\}$$