

Calculatrice interdite

## Exercice 1

11 points

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

- 1) Tracer le cercle trigonométrique, et placer  $A, B, C$  et  $D$  points images respectifs des réels  $\frac{2\pi}{3}$ ,  $-\frac{5\pi}{6}$ ,  $-\frac{25\pi}{4}$  et  $\frac{41\pi}{2}$ . On justifiera lorsque le placement n'est pas trivial.
- 2) Les réels  $\frac{16\pi}{3}$  et  $-\frac{5\pi}{3}$  ont-ils le même point image sur le cercle trigonométrique ?
- 3) Soit  $a$  un réel de l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  tel que  $\sin(a) = \frac{4}{5}$ . Calculer  $\cos(a)$ .
- 4) Résoudre sans justification les équations suivantes.
  - a.  $\sin(x) = \frac{1}{2}$  et  $x \in [0; 2\pi[$
  - b.  $\cos(x) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$  et  $x \in [-\pi; \pi[$
- 5) Résoudre les inéquations suivantes. On justifiera graphiquement à l'aide du cercle trigonométrique.
  - a.  $\cos(x) > \frac{1}{2}$  et  $x \in [0; 2\pi[$
  - b.  $\sqrt{2}\sin(x) + 1 \leq 0$  et  $x \in [-\pi; \pi[$

## Exercice 2

6 points

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 1 - 4\cos(5x)$ .

- 1) Calculer  $f\left(\frac{\pi}{5}\right)$  et  $f\left(\frac{\pi}{10}\right)$  en détaillant les étapes.
- 2) Étudier la parité de  $f$ .
- 3) Montrer que  $f$  est périodique de période  $\frac{2\pi}{5}$ .
- 4) Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $-3 \leq f(x) \leq 5$ .

## Exercice 3

3 points

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$  par :

$$f(x) = \frac{2}{x+3} \quad ; \quad g(x) = -x$$

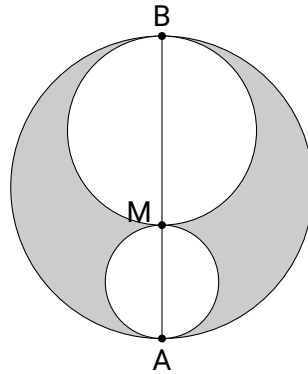
On note  $C_f$  et  $C_g$  leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthonormé.

- 1) Résoudre l'inéquation  $f(x) > g(x)$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ .
- 2) Que peut-on en déduire pour les courbes  $C_f$  et  $C_g$  ?

## Exercice 4

6 points

Aminata souhaite créer un pendentif formé de trois disques deux à deux tangents, comme indiqué sur la figure ci-dessous. Le point  $M$  appartient au diamètre  $[AB]$ , de longueur 4 cm, du grand disque. On note  $x$  la longueur  $AM$  en cm. On appelle  $A(x)$  l'aire de la partie grisée en fonction de  $x$ .



Rappel : L'aire d'un disque de rayon  $R$  est donnée par la formule  $A = \pi \times R^2$ .

- 1) Démontrer que pour tout  $x \in [0; 4]$ ,  $A(x) = -\frac{\pi}{2}(x^2 - 4x)$ .
- 2) Déterminer la position du point  $M$  pour laquelle l'aire de la partie grisée est maximale, et donner la valeur de cette aire.
- 3) Aminata souhaite que la partie grisée représente au moins un quart de la surface du pendentif. Montrer que cette contrainte amène à résoudre l'inéquation :

$$-x^2 + 4x - 2 \geq 0$$

- 4) En déduire les valeurs de  $x$  permettant de respecter la contrainte d'Aminata donnée dans la question 3).

**Exercice 5****4 points**

On considère l'équation  $(E)$  d'inconnue  $x$  :

$$2 \cos^4(x) + 3 \sin^2(x) - 2 = 0$$

1) En posant  $X = \cos^2(x)$ , montrer que résoudre  $(E)$  revient à résoudre l'équation :

$$2X^2 - 3X + 1 = 0$$

2) Déterminer alors l'ensemble des solutions de  $(E)$  dans l'intervalle  $[0; 2\pi[$ .