

Exercice 1 (8,5 points)

1. L'effectif total de l'entreprise est $N = 450 + 230 + 320 = 1000$ employés.

L'expérience consiste à choisir un employé au hasard. Nous sommes en situation d'équiprobabilité.

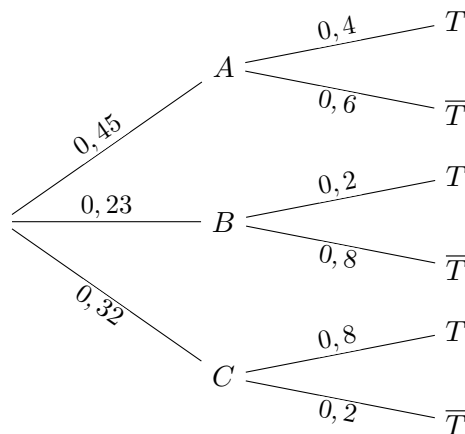
Le service A compte 450 employés, donc la probabilité de choisir un employé du service A est :

$$p(A) = \frac{450}{1000} = \boxed{0,45}$$

2. L'énoncé indique que 40 % des employés du service A résident à moins de 30 min. On a donc :

$$p_A(T) = \frac{40}{100} = \boxed{0,4}$$

3. Représentation de la situation à l'aide d'un arbre pondéré :



4. On cherche à calculer la probabilité de l'évènement $B \cap T$. D'après l'arbre de probabilités :

$$p(B \cap T) = p(B) \times p_B(T) = 0,23 \times 0,2 = \boxed{0,046}$$

5. Les évènements A , B et C forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$p(T) = p(A \cap T) + p(B \cap T) + p(C \cap T)$$

On remplace par les valeurs :

$$p(T) = (0,45 \times 0,4) + 0,046 + (0,32 \times 0,8)$$

$$p(T) = 0,18 + 0,046 + 0,256$$

$$p(T) = \boxed{0,482}$$

6. On cherche à calculer $p_{\bar{T}}(C)$, c'est-à-dire la probabilité que l'employé fasse partie du service C

sachant qu'il réside à plus de 30 min. Par définition :

$$p_{\bar{T}}(C) = \frac{p(C \cap \bar{T})}{p(\bar{T})}$$

On sait que $p(\bar{T}) = 1 - p(T) = 1 - 0,482 = 0,518$.

D'après l'arbre, $p(C \cap \bar{T}) = p(C) \times p_C(\bar{T}) = 0,32 \times 0,2 = 0,064$.

On obtient donc :

$$p_{\bar{T}}(C) = \frac{0,064}{0,518} = \frac{64}{518} = \boxed{\frac{32}{259}} \approx 0,124$$

7. On cherche $p(A \cup T)$. D'après la formule des probabilités :

$$p(A \cup T) = p(A) + p(T) - p(A \cap T)$$

$$p(A \cup T) = 0,45 + 0,482 - 0,18$$

$$p(A \cup T) = \boxed{0,752}$$

8. On vérifie si $p(A \cap T) = p(A) \times p(T)$.

D'une part, $p(A \cap T) = 0,18$.

D'autre part, $p(A) \times p(T) = 0,45 \times 0,482 = 0,2169$.

Puisque $0,18 \neq 0,2169$, on a $p(A \cap T) \neq p(A) \times p(T)$.

Les évènements A et T **ne sont pas indépendants**.

9. On cherche $p_T(B)$:

$$p_T(B) = \frac{p(B \cap T)}{p(T)} = \frac{0,046}{0,482} = \frac{46}{482} = \boxed{\frac{23}{241}} \approx 0,095$$

Interprétation : Sachant qu'un employé réside à moins de 30 min de son lieu de travail, il y a environ 9,5 % de chances qu'il fasse partie du service B.

Exercice 2 (4,5 points)

On considère la fonction f définie par $f(t) = \frac{-1}{6}t^3 + \frac{5}{2}t^2 + 28t$.

1. On cherche le nombre de cas pour $t = 6$:

$$f(6) = \frac{-1}{6}(6)^3 + \frac{5}{2}(6)^2 + 28(6)$$

$$f(6) = -36 + \frac{5}{2}(36) + 168$$

$$f(6) = -36 + 90 + 168 = \boxed{222}$$

Au bout de six jours, on compte donc 222 milliers de malades, soit 222 000 malades.

2. Pour déterminer le pic de l'épidémie, il faut trouver le maximum de la fonction f . On commence par calculer sa fonction dérivée f' .

f est une fonction polynôme, donc dérivable sur $[0; 30]$ (durée d'un mois) :

$$f'(t) = \frac{-1}{6}(3t^2) + \frac{5}{2}(2t) + 28$$

$$f'(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 5t + 28$$

On étudie le signe du trinôme de la forme $at^2 + bt + c$ avec $a = -0,5$, $b = 5$ et $c = 28$.

Son discriminant est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4(-0,5)(28) = 25 + 56 = 81$$

$\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines distinctes :

$$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 9}{-1} = 14$$

$$t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 9}{-1} = -4$$

Comme $a = -0,5 < 0$, $f'(t)$ est positif à l'intérieur des racines et négatif à l'extérieur. Or, on étudie l'épidémie sur un temps positif ($t \geq 0$).

Donc, sur $[0; +\infty[$, $f'(t)$ est strictement positif sur $[0; 14[$ et strictement négatif sur $]14; +\infty[$.

La fonction f est croissante puis décroissante, et atteint son maximum pour $t = 14$.

Le pic de l'épidémie est atteint au bout de 14 jours.

Exercice 3 (5,5 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x - 3$.

1. f est une fonction polynomiale, donc dérivable sur \mathbb{R} .

$$f'(x) = \frac{1}{3}(3x^2) - 3(2x) + 5$$

$$f'(x) = \boxed{x^2 - 6x + 5}$$

2. $f'(x)$ est un trinôme du second degré ($a = 1$, $b = -6$, $c = 5$).

Cherchons ses racines. Une racine évidente est $x_1 = 1$ (car $1 - 6 + 5 = 0$).

Le produit des racines valant $\frac{c}{a} = 5$, la seconde racine est $x_2 = 5$.

Comme $a = 1 > 0$, le trinôme est positif à l'extérieur de ses racines et négatif à l'intérieur.

On en déduit le tableau de signes et de variations de f (les valeurs aux extrema sont données en aide) :

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
Signe de $f'(x)$	+	0	-	0	+
Variations de f	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{34}{3}$	$+\infty$	

3. Vrai ou Faux :

a) Pour tout $x \in]-\infty; 0[$, $f(x) \leq -3$. **Vrai.**

Justification : On remarque que $f(0) = -3$. Sur l'intervalle $] -\infty; 1]$, la fonction f est strictement croissante. Ainsi, si $x < 0$, alors $f(x) < f(0)$, soit $f(x) < -3$, ce qui implique a fortiori $f(x) \leq -3$.

b) Pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f(x) \geq -11, 33$. **Faux.**

Justification : Le minimum de f sur $[0; +\infty[$ est atteint en $x = 5$ et vaut $f(5) = -\frac{34}{3}$. Or, $-\frac{34}{3} \approx -11, 3333\dots$ et on a $-11, 3333\dots < -11, 33$. Donc en prenant $x = 5$, on a une valeur qui est strictement inférieure à $-11, 33$.

c) Pour tout $x \leq 7$, $f(x) < 0$. **Vrai.**

Justification : Sur l'intervalle $] -\infty; 5]$, le maximum de la fonction f est $f(1) = -\frac{2}{3} < 0$. Sur l'intervalle $[5; 7]$, la fonction f est strictement croissante et atteint son maximum local en $x = 7$ avec $f(7) = -\frac{2}{3} < 0$. Ainsi, pour tout réel $x \leq 7$, la fonction ne dépasse jamais la valeur $-\frac{2}{3}$, on a donc bien $f(x) < 0$.

d) Pour tout $x > 7$, $f(x) \geq 0$. **Faux.**

Justification : On sait que $f(7) = -\frac{2}{3}$ (qui est strictement négatif). Par continuité (ou juste en observant le tableau de variations), pour un réel x très proche de 7 mais strictement supérieur (par exemple $x = 7, 01$), l'image $f(x)$ est encore strictement négative. La fonction s'annulera pour une valeur strictement supérieure à 7, mais pas immédiatement après.

Exercice 4 (1,5 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{2x - 3}{2x^2 + 1}$.

La fonction est de la forme $\frac{u}{v}$, avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= 2x - 3 & \implies & & u'(x) &= 2 \\ v(x) &= 2x^2 + 1 & \implies & & v'(x) &= 4x \end{aligned}$$

On applique la formule de dérivation d'un quotient $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$f'(x) = \frac{2(2x^2 + 1) - (2x - 3)(4x)}{(2x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^2 + 2 - (8x^2 - 12x)}{(2x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^2 + 2 - 8x^2 + 12x}{(2x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = \boxed{\frac{-4x^2 + 12x + 2}{(2x^2 + 1)^2}}$$