Exercice 1 (8,5 points)

Une entreprise est composée de trois services A, B et C d'effectifs 450, 230 et 320 employés.
Une enquête sur le temps de trajet quotidien entre le domicile des employés et l'entreprise a montré que $40\,\%$ des employés du service A, $20\,\%$ du service B et $80\,\%$ du service C résident à moins de 30 min de l'entreprise.
On choisit au hasard un employé de cette entreprise et on considère les évènements suivants :

- A : « L'employé fait partie du service A »
- B : « L'employé fait partie du service B »
- C : « L'employé fait partie du service C »
- T : « L'employé réside à moins de 30 min de l'entreprise. »

1. Justifier que $p(A) = 0,45$.
2. Donner $p_A(T)$.
3. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré en indiquant les probabilités associées à chaque branche.
4. Déterminer la probabilité que l'employé choisi soit du service B et qu'il réside à moins de 30 min de son lieu de travail.
5. Montrer que $p(T) = 0,482$.
6. Sachant qu'un employé réside à plus de 30 min de son lieu de travail, déterminer la probabilité qu'il fasse partie du service C.
7. Déterminer la probabilité que l'employé choisi soit du service A ou qu'il réside à moins de 30 min de son lieu de travail.
8. Les évènements A et T sont-ils indépendants ? Justifier.
9. Déterminer $p_T(B)$. Interpréter.

Aide au calcul : $0,45 \times 0,4 = 0,18$; $0,45 \times 0,6 = 0,27$; $0,23 \times 0,2 = 0,046$; $0,23 \times 0,8 = 0,184$; $0,32 \times 0,8 = 0,256$; $0,32 \times 0,2 = 0,064$; $0,45 \times 0,482 = 0,2169$; $0,23 \times 0,482 = 0,11086$

Exercice 2 (4,5 points)

On a modélisé l'évolution d'une épidémie de grippe sur un mois de la façon suivante : si t est le temps en jours écoulé depuis le début de l'épidémie, le nombre de cas en milliers est donné par :

$$f(t) = \frac{-1}{6}t^3 + \frac{5}{2}t^2 + 28t$$

1. Combien de malades compte-t-on au bout de six jours ?
2. Déterminer le nombre de jours pour atteindre le pic de l'épidémie.

Aide au calcul : $14^3/6 = 1372/3$; $14^2 \times 2,5 = 490$; $28 \times 14 = 392$

Exercice 3 (5,5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x - 3$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f.
3. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.
   a) Pour tout $x \in]-\infty\,;0[$, $f(x) \leqslant -3$.
   b) Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $f(x) \geqslant -11,33$.
   c) Pour tout $x \leqslant 7$, $f(x) < 0$.
   d) Pour tout $x > 7$, $f(x) \geqslant 0$.

Aide au calcul : $f(1) = -\frac{2}{3}$; $f(5) = -\frac{34}{3}$; $f(7) = -\frac{2}{3}$

Exercice 4 (1,5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x-3}{2x^2+1}$. Calculer $f'(x)$.