

## PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES – QCM

Bien qu'aucune justification ne soit demandée dans l'énoncé, des explications sont fournies ici pour la compréhension.

**Question 1. Réponse d.** 1

$$\frac{10^5 \times 10^{-2}}{10^4} = \frac{10^{5-2}}{10^4} = \frac{10^3}{10^4} = 10^{3-4} = 10^{-1}$$

**Question 2. Réponse b. Une baisse de 10 %**

Une baisse de 40 % correspond à un coefficient multiplicateur de  $1 - 0,40 = 0,60$ .

Une hausse de 50 % correspond à un coefficient multiplicateur de  $1 + 0,50 = 1,50$ .

Coefficient global :  $CM = 0,60 \times 1,50 = 0,90$ .

Or  $0,90 = 1 - 0,10$ , ce qui correspond bien à une baisse de 10 %.

**Question 3. Réponse c.**  $S = ] - 2 ; +\infty[$

$$x + 3 < 2x + 5 \iff 3 - 5 < 2x - x \iff -2 < x$$

Les solutions sont les réels strictement supérieurs à  $-2$ .

**Question 4. Réponse b.**  $]20 ; 70[$

On cherche à résoudre  $h(x) > 0 \iff g(x) - f(x) > 0 \iff g(x) > f(x)$ .

Graphiquement, cela revient à chercher sur quel intervalle la courbe  $C_g$  est située strictement au-dessus de la courbe  $C_f$ . On lit que c'est le cas pour  $x \in ]20 ; 70[$ .

**Question 5. Réponse d.**  $\frac{11}{32}$

Soit  $R$  l'évènement "tirer un roi" et  $C$  "tirer un cœur".

$$P(R \cup C) = P(R) + P(C) - P(R \cap C) = \frac{4}{32} + \frac{8}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$$

(on ne compte pas le Roi de cœur deux fois).

**Question 6. Réponse d. La médiane de la série B est strictement supérieure à la médiane de la série A.**

Moyenne A = 10. Moyenne B = 10. Les moyennes sont égales.

Série A ordonnée : 9 ; 10 ; 10 ; 11. Médiane A = 10.

Série B ordonnée : 6 ; 10 ; 11 ; 13. Médiane B = 10,5.

Donc la médiane de B est strictement supérieure à celle de A.

**Question 7. Réponse b.**  $-2$

Le coefficient directeur  $m$  est donné par :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 5}{3 - 1} = \frac{-4}{2} = -2$$

**Question 8. Réponse d.**  $12x + 9$

$$(2x + 3)^2 - 4x^2 = (4x^2 + 12x + 9) - 4x^2 = 12x + 9$$

**Question 9. Réponse b.** 0,6

Sachant que l'élève est une fille, l'univers est restreint aux 50 filles. Parmi elles, 30 suivent Allemand.

$$P_{\text{Fille}}(\text{Allemand}) = \frac{30}{50} = \frac{3}{5} = 0,6$$

## DEUXIÈME PARTIE

### Exercice 1 (5 points)

#### Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

1. La fonction  $g$  définie par  $g(x) = -4x^3 - 3x^2 + 2$  est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout réel  $x$  :

$$g'(x) = -4 \times 3x^2 - 3 \times 2x = -12x^2 - 6x$$

En factorisant par  $-6x$ , on obtient bien :

$$g'(x) = -6x(2x + 1)$$

2. Le signe de  $g'(x)$  dépend du produit de  $-6x$  et de  $(2x + 1)$ .

- $-6x = 0 \iff x = 0$
- $2x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$

On dresse le tableau de signes :

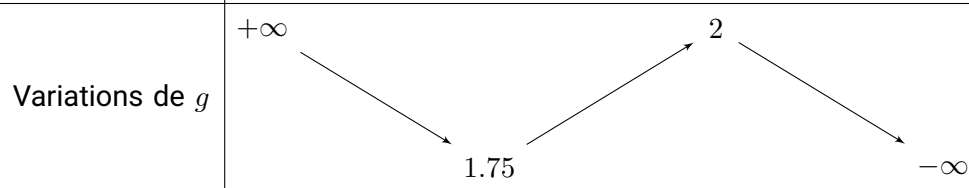
$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$0$	$+\infty$	
Signe de $-6x$	+	+	0	-	
Signe de $2x+1$	-	0	+	+	
Signe de $g'(x)$	-	0	+	0	-

3. On en déduit les variations de la fonction  $g$ .

Calculons les extremums :

- $g\left(-\frac{1}{2}\right) = -4\left(-\frac{1}{8}\right) - 3\left(\frac{1}{4}\right) + 2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{8}{4} = \frac{2-3+8}{4} = \frac{7}{4} = 1,75$
- $g(0) = -4(0)^3 - 3(0)^2 + 2 = 2$

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$0$	$+\infty$	
$g'(x)$	-	0	+	0	-
Variations de $g$	$+\infty$			$2$	$-\infty$



4. Par lecture graphique, la courbe traverse l'axe des abscisses une seule fois. On lit :

$$\alpha \approx 0,7$$

5. D'après le tableau de variations et la définition de  $\alpha$  (racine de  $g$ ), on déduit le signe de  $g(x)$  :

- Sur  $] -\infty ; \alpha]$ , la fonction est à valeurs strictement positives ou nulles (car son minimum local vaut  $1,75 > 0$ ).
- Sur  $[\alpha ; +\infty[$ , la fonction décroît vers  $-\infty$ , elle est donc négative.

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
Signe de $g(x)$	+	0	-

### Partie B : Etude des variations de $f$

- La fonction  $f(x) = \frac{2x+1}{x^3+1}$  est une fonction rationnelle. Elle est dérivable sur tout intervalle où son dénominateur ne s'annule pas. Or  $x^3+1=0 \iff x^3=-1 \iff x=-1$ .

Donc  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

On pose  $u(x) = 2x + 1 \implies u'(x) = 2$  et  $v(x) = x^3 + 1 \implies v'(x) = 3x^2$ .

$$f = \frac{u}{v} \implies f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x^3 + 1) - (2x + 1)(3x^2)}{(x^3 + 1)^2} \\ &= \frac{2x^3 + 2 - 6x^3 - 3x^2}{(x^3 + 1)^2} \\ &= \frac{-4x^3 - 3x^2 + 2}{(x^3 + 1)^2} \end{aligned}$$

On reconnaît l'expression de  $g(x)$  au numérateur, donc pour tout  $x \neq -1$  :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x^3 + 1)^2}$$

2. Pour tout réel  $x \neq -1$ ,  $(x^3 + 1)^2 > 0$  (un carré non nul est toujours strictement positif).

Le signe de  $f'(x)$  ne dépend donc que du signe de  $g(x)$ , étudié dans la **Partie A**.

On rappelle que  $g(-1) = 3 > 0$ , donc la valeur interdite  $-1$  se situe dans la zone où  $g(x)$  est positif.

$x$	$-\infty$	$-1$	$\alpha$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+		0	-
Variations de $f$	↗		$f(\alpha)$ ↗ ↘	

### Exercice 2 (3,5 points)

1. Chaque année, on abat 4% des arbres existants, ce qui correspond à conserver 96% des arbres (soit un coefficient multiplicateur de 0,96). Ensuite, on replante 2 500 arbres, soit 2,5 milliers d'arbres.

En modélisant par la suite  $u_n$  exprimée en milliers, l'année suivante  $u_{n+1}$  s'écrit donc bien :

$$u_{n+1} = 0,96u_n + 2,5$$

2. On pose  $v_n = u_n - 62,5$ . Exprimons  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$  :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 62,5 \\ &= (0,96u_n + 2,5) - 62,5 \\ &= 0,96u_n - 60 \end{aligned}$$

On remarque que, d'après les indications numériques,  $60 = 0,96 \times 62,5$ . Factorisons donc par  $0,96$  :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 0,96(u_n - 62,5) \\ v_{n+1} &= 0,96v_n \end{aligned}$$

On en conclut que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $q = 0,96$ .

Son premier terme est  $v_0 = u_0 - 62,5 = 50 - 62,5 = -12,5$ .

3. D'après le cours sur les suites géométriques,  $v_n = v_0 \times q^n$ .

$$\boxed{v_n = -12,5 \times 0,96^n}$$

Or  $v_n = u_n - 62,5 \iff u_n = v_n + 62,5$ . On en déduit :

$$\boxed{u_n = -12,5 \times 0,96^n + 62,5}$$

4. Pour étudier la différence  $u_{n+1} - u_n$  :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (-12,5 \times 0,96^{n+1} + 62,5) - (-12,5 \times 0,96^n + 62,5) \\ &= -12,5 \times 0,96^{n+1} + 12,5 \times 0,96^n \\ &= 12,5 \times 0,96^n \times (-0,96 + 1) \\ &= 12,5 \times 0,96^n \times 0,04 \end{aligned}$$

D'après les indications,  $12,5 \times 0,04 = 0,5 = \frac{1}{2}$ . Ainsi :

$$\boxed{u_{n+1} - u_n = \frac{0,96^n}{2}}$$

5. Pour tout entier  $n$ ,  $0,96 > 0 \implies 0,96^n > 0$ . Donc  $\frac{0,96^n}{2} > 0$ .

Comme  $u_{n+1} - u_n > 0$  pour tout  $n$ , on en déduit que la suite  $(u_n)$  est strictement croissante.

6. L'algorithme doit modéliser l'évolution du nombre d'arbres. L'énoncé indique 50 000 (soit la valeur absolue, ou 50 en milliers). Les deux modélisations sont justes, voici celle correspondant à la définition exacte de la suite  $(u_n)$  en milliers :

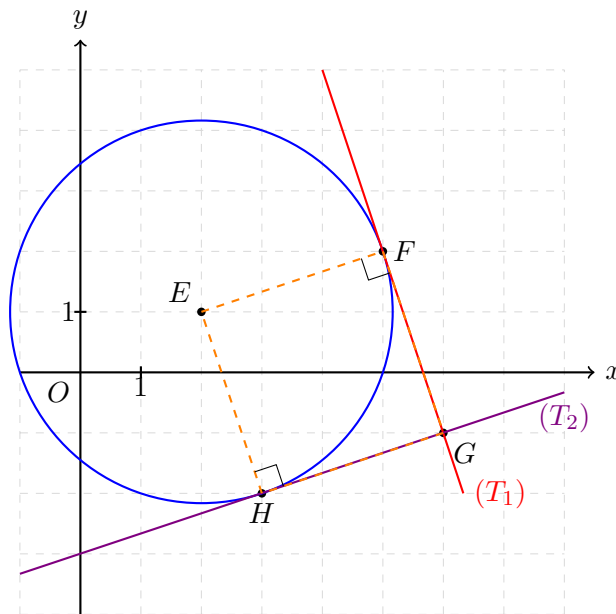
```

def seuil():
    U = 50
    N = 0
    while (U <= 55):
        U = 0.96 * U + 2.5
        N = N + 1
    return(N)
    
```

(Remarque : si on travaille en unités brutes sans les milliers, il faut initialiser 'U = 50000', conditionner 'U <= 55000' et calculer 'U = 0.96 \* U + 2500')

### Exercice 3 (4 points)

#### 1. Figure complétée :



2. Le rayon du cercle est  $R = EF = \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2} = \sqrt{(5 - 2)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ .

L'équation du cercle  $C$  de centre  $E(2; 1)$  et de rayon  $\sqrt{10}$  est de la forme  $(x - x_E)^2 + (y - y_E)^2 = R^2$ , soit :

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$$

3. On remplace les coordonnées de  $H(3; -2)$  dans l'équation :  $(3 - 2)^2 + (-2 - 1)^2 = 1^2 + (-3)^2 = 1 + 9 = 10$ .

L'égalité est vérifiée, donc  $H \in C$ .

4.  $(T_1)$  est la tangente en  $F$  au cercle de centre  $E$ . Le vecteur  $\overrightarrow{EF}(3; 1)$  est donc un vecteur normal

à  $(T_1)$ .

L'équation cartésienne de  $(T_1)$  est de la forme  $ax + by + c = 0$ , avec  $a = 3$  et  $b = 1$ . Donc  $3x + y + c = 0$ .

$$F(5; 2) \in (T_1) \implies 3(5) + 2 + c = 0 \implies 15 + 2 + c = 0 \implies c = -17.$$

Une équation de  $(T_1)$  est donc bien :

$$\boxed{3x + y - 17 = 0}$$

5.  $(T_2)$  est la tangente en  $H$  au cercle. Le vecteur  $\overrightarrow{EH}(3 - 2; -2 - 1) = \overrightarrow{EH}(1; -3)$  est normal à  $(T_2)$ .

L'équation de  $(T_2)$  est de la forme  $1x - 3y + c' = 0$ .

$$H(3; -2) \in (T_2) \implies 1(3) - 3(-2) + c' = 0 \implies 3 + 6 + c' = 0 \implies c' = -9.$$

Une équation de  $(T_2)$  est donc :

$$\boxed{x - 3y - 9 = 0}$$

6.  $G(x; y)$  est l'intersection de  $(T_1)$  et  $(T_2)$ . Ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} 3x + y = 17 & (L_1) \\ x - 3y = 9 & (L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} y = 17 - 3x \\ x - 3(17 - 3x) = 9 \end{cases}$$

On résout la seconde équation :  $x - 51 + 9x = 9 \iff 10x = 60 \iff x = 6$ .

On déduit  $y$  :  $y = 17 - 3(6) = 17 - 18 = -1$ .

Les coordonnées de  $G$  sont donc :  $\boxed{G(6; -1)}$ .

7. Nature du quadrilatère  $EFGH$  :

- $E$  est le centre du cercle,  $F$  et  $H$  sont sur le cercle, donc  $EF = EH = \sqrt{10}$ . Les côtés adjacents sont égaux.
- $(T_1)$  est tangente en  $F$ , donc l'angle  $\widehat{EFG}$  est droit.  $(T_2)$  est tangente en  $H$ , donc l'angle  $\widehat{EHG}$  est droit.
- Calculons le produit scalaire  $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EH}$  :  $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EH} = 3 \times 1 + 1 \times (-3) = 3 - 3 = 0$ .  
Les vecteurs sont orthogonaux, donc l'angle  $\widehat{FEH}$  est droit.

Un quadrilatère possédant 3 angles droits est un rectangle. De plus, deux côtés consécutifs sont de même longueur ( $EF = EH$ ).

En conclusion,  $\boxed{EFGH \text{ est un carré}}$ .

### Exercice 4 (1,5 point)

On sait que  $P(B) = \frac{3}{4}$  et  $P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{6}$ .

1. D'après la formule des probabilités totales,  $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$ , cette réunion étant disjointe.

Donc  $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$ .

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(B) - P(\bar{A} \cap B) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(A \cap B) = \frac{7}{12}}$$

2. Dire que  $A$  et  $B$  sont indépendants équivaut à la relation :  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ .

On remplace par les valeurs connues :

$$\begin{aligned} \frac{7}{12} &= P(A) \times \frac{3}{4} \\ P(A) &= \frac{\frac{7}{12}}{\frac{3}{4}} \\ P(A) &= \frac{7}{12} \times \frac{4}{3} \\ P(A) &= \frac{7 \times 4}{3 \times 4 \times 3} = \frac{7}{9} \end{aligned}$$

Pour que  $A$  et  $B$  soient indépendants, il faut que  $\boxed{P(A) = \frac{7}{9}}$ .