

## Exercice 1

1. Montrons la première égalité :

$$AB^2 - AC^2 = \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2$$

En utilisant l'identité remarquable scalaire liée à la différence de deux carrés, on a :

$$AB^2 - AC^2 = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

D'après la relation de Chasles,  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ .

En remplaçant, on obtient bien la première relation :

$$AB^2 - AC^2 = \overrightarrow{CB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

De la même manière, montrons la seconde égalité :

$$CD^2 - BD^2 = \overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{BD}^2$$

$$CD^2 - BD^2 = (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BD}) \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD})$$

D'après la relation de Chasles,  $\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CB}$ .

En remplaçant, on obtient bien la seconde relation :

$$CD^2 - BD^2 = \overrightarrow{CB} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD})$$

2. Ajoutons membre à membre les deux égalités démontrées à la question 1 :

$$AB^2 - AC^2 + CD^2 - BD^2 = \overrightarrow{CB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{CB} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD})$$

On peut factoriser par le vecteur  $\overrightarrow{CB}$  :

$$AB^2 - AC^2 + CD^2 - BD^2 = \overrightarrow{CB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD})$$

En regroupant astucieusement les termes pour utiliser la relation de Chasles, on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

En remplaçant dans l'expression, on obtient :

$$AB^2 - AC^2 + CD^2 - BD^2 = \overrightarrow{CB} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD})$$

$$AB^2 - AC^2 + CD^2 - BD^2 = \overrightarrow{CB} \cdot (2\overrightarrow{AD})$$

Soit le résultat attendu :

$$AB^2 - AC^2 + CD^2 - BD^2 = 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AD}$$

3. Si les diagonales d'un quadrilatère sont perpendiculaires, alors les droites  $(AD)$  et  $(BC)$  sont perpendiculaires. Les vecteurs  $\overrightarrow{AD}$  et  $\overrightarrow{CB}$  sont donc orthogonaux, ce qui signifie que leur produit scalaire est nul :  $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ .

D'après la question 2, cela implique que :

$$AB^2 - AC^2 + CD^2 - BD^2 = 0$$

$$\iff AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$$

**Conclusion :** Si les diagonales d'un quadrilatère sont perpendiculaires, la somme des carrés des côtés opposés est égale.

## Exercice 2

1. ABCD est un carré de côté  $a$ . Les côtés consécutifs d'un carré sont de même longueur et perpendiculaires.

Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AD}$  sont donc orthogonaux, ce qui donne :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0}$$

Le carré scalaire d'un vecteur est égal au carré de sa norme, donc :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = a^2} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{AD}^2 = AD^2 = a^2}$$

2. D'après la relation de Chasles, en passant par le point A, on a :

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}$$

L'énoncé nous donne  $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ .

Pour déterminer  $\overrightarrow{EA}$ , exploitons la donnée  $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DA}$ . Décomposons  $\overrightarrow{DE}$  avec le point A :

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DA}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$$

$$\Leftrightarrow -\overrightarrow{EA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{EA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

En substituant ces deux expressions dans notre égalité de départ, on obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}}$$

3. D'après la relation de Chasles, en introduisant le point A :

$$\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI}$$

Or,  $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$  et l'énoncé donne  $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ .

De plus, dans le carré ABCD, on sait que  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$  (règle du parallélogramme).

On remplace  $\overrightarrow{AC}$  par cette somme :

$$\overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

On développe et on réduit :

$$\overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$$

$$\boxed{\overrightarrow{BI} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}}$$

4. Calculons maintenant le produit scalaire  $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BI}$  en remplaçant les vecteurs par les expressions trouvées aux questions 2 et 3 :

$$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BI} = \left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\right)$$

On développe en utilisant la bilinéarité du produit scalaire et sachant que le produit scalaire est commutatif ( $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ ) :

$$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BI} = -\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{9}{8}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{8}(\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}) + \frac{3}{8}\overrightarrow{AD}^2$$

Or, d'après la question 1,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ ,  $\overrightarrow{AB}^2 = a^2$  et  $\overrightarrow{AD}^2 = a^2$ . On a donc :

$$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BI} = -\frac{3}{8}a^2 + 0 - 0 + \frac{3}{8}a^2$$

$$\boxed{\vec{EF} \cdot \vec{BI} = 0}$$

**Interprétation géométrique :** Le produit scalaire est nul, les vecteurs  $\vec{EF}$  et  $\vec{BI}$  sont donc orthogonaux. Par conséquent,  $\boxed{\text{les droites } (EF) \text{ et } (BI) \text{ sont perpendiculaires.}}$

### Exercice 3

1. Exprimons la somme  $\vec{IA} + 2\vec{IB}$  en fonction de  $\vec{AB}$ .

D'après l'énoncé,  $\vec{AI} = \frac{2}{3}\vec{AB}$ , donc  $\vec{IA} = -\frac{2}{3}\vec{AB}$ .

Pour le vecteur  $\vec{IB}$ , on introduit le point A avec la relation de Chasles :

$$\vec{IB} = \vec{IA} + \vec{AB} = -\frac{2}{3}\vec{AB} + \vec{AB} = \frac{1}{3}\vec{AB}$$

Calculons maintenant la somme :

$$\vec{IA} + 2\vec{IB} = -\frac{2}{3}\vec{AB} + 2\left(\frac{1}{3}\vec{AB}\right) = -\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AB} = \vec{0}$$

On a bien vérifié que :  $\boxed{\vec{IA} + 2\vec{IB} = \vec{0}}$

*Remarque :* Cela signifie que le point I est le barycentre du système pondéré  $\{(A, 1) ; (B, 2)\}$ .

2. D'après l'énoncé,  $\vec{AJ} = 2\vec{AB}$ , donc  $\vec{JA} = -2\vec{AB}$ .

Pour le vecteur  $\vec{JB}$ , on introduit le point A avec la relation de Chasles :

$$\vec{JB} = \vec{JA} + \vec{AB} = -2\vec{AB} + \vec{AB} = -\vec{AB}$$

Calculons maintenant la combinaison :

$$\vec{JA} - 2\vec{JB} = -2\vec{AB} - 2(-\vec{AB}) = -2\vec{AB} + 2\vec{AB} = \vec{0}$$

On a bien vérifié que :  $\boxed{\vec{JA} - 2\vec{JB} = \vec{0}}$

*Remarque :* Cela signifie que le point J est le barycentre du système pondéré  $\{(A, 1) ; (B, -2)\}$ .

3. Soit un point M quelconque du plan. Pour exprimer  $\vec{MA} + 2\vec{MB}$ , introduisons le point I à l'aide de la relation de Chasles :

$$\vec{MA} + 2\vec{MB} = (\vec{MI} + \vec{IA}) + 2(\vec{MI} + \vec{IB})$$

$$\vec{MA} + 2\vec{MB} = \vec{MI} + \vec{IA} + 2\vec{MI} + 2\vec{IB}$$

$$\vec{MA} + 2\vec{MB} = 3\vec{MI} + (\vec{IA} + 2\vec{IB})$$

D'après la question 1,  $\vec{IA} + 2\vec{IB} = \vec{0}$ , il reste donc :

$$\boxed{\vec{MA} + 2\vec{MB} = 3\vec{MI}}$$

De la même manière, pour exprimer  $\vec{MA} - 2\vec{MB}$ , introduisons le point J :

$$\vec{MA} - 2\vec{MB} = (\vec{MJ} + \vec{JA}) - 2(\vec{MJ} + \vec{JB})$$

$$\vec{MA} - 2\vec{MB} = \vec{MJ} + \vec{JA} - 2\vec{MJ} - 2\vec{JB}$$

$$\vec{MA} - 2\vec{MB} = -\vec{MJ} + (\vec{JA} - 2\vec{JB})$$

D'après la question 2,  $\vec{JA} - 2\vec{JB} = \vec{0}$ , il reste donc :

$$\boxed{\vec{MA} - 2\vec{MB} = -\vec{MJ}}$$

4. Transformons la condition d'appartenance à l'ensemble  $\mathcal{E}$ .

$$M \in \mathcal{E} \iff MA^2 - 4MB^2 = 0$$

On exprime les distances comme les carrés scalaires des vecteurs associés :

$$M \in \mathcal{E} \iff \vec{MA}^2 - 4\vec{MB}^2 = 0$$

$$M \in \mathcal{E} \iff \vec{MA}^2 - (2\vec{MB})^2 = 0$$

On reconnaît l'identité remarquable  $(u^2 - v^2)$  appliquée au produit scalaire :

$$M \in \mathcal{E} \iff (\vec{MA} - 2\vec{MB}) \cdot (\vec{MA} + 2\vec{MB}) = 0$$

En utilisant les réductions vectorielles démontrées à la question 3, on peut remplacer chaque facteur :

$$M \in \mathcal{E} \iff (-\vec{MJ}) \cdot (3\vec{MI}) = 0$$

Par bilinéarité du produit scalaire, on obtient :

$$M \in \mathcal{E} \iff -3(\vec{MJ} \cdot \vec{MI}) = 0$$

En divisant par  $-3$ , et puisque le produit scalaire est commutatif, cela équivaut à :

$$\boxed{M \in \mathcal{E} \iff \vec{MI} \cdot \vec{MJ} = 0}$$

**Nature géométrique de l'ensemble  $\mathcal{E}$  :**

L'ensemble des points M du plan vérifiant l'égalité  $\vec{MI} \cdot \vec{MJ} = 0$  forme, par définition de l'orthogonalité dans un triangle rectangle (théorème de la médiane/cercle de diamètre), le cercle de diamètre  $[IJ]$ .