Exercice 1 [6 points]

A, B, C, D quatre points.

1. Montrer que :

$$AB^2 - AC^2 = \overrightarrow{CB} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \quad \text{et} \quad CD^2 - BD^2 = \overrightarrow{CB} \cdot \left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD}\right)$$

2. En déduire que :

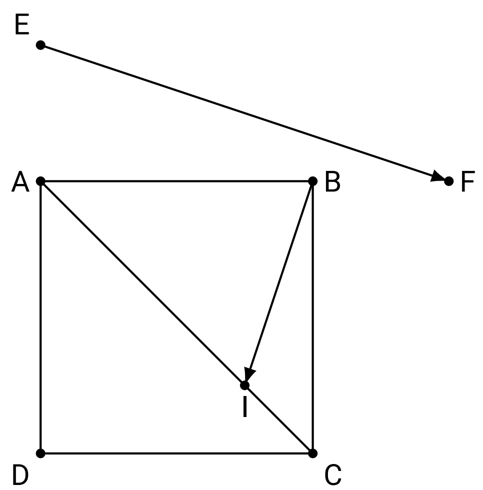
$$AB^2 - AC^2 + CD^2 - BD^2 = 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AD}$$

3. Que peut-on en déduire lorsque les diagonales d'un quadrilatère sont perpendiculaires ? Justifier

Exercice 2 [7 points]

Dans cet exercice on n'utilisera pas de repère orthonormé. ABCD est un carré de côté a et les points E, F et I tels que :

$$\overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DA} \qquad \overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$



1. Déterminer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}^2$ et $\overrightarrow{AD}^2$ en fonction de a.
2. Démontrer que $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.
3. Décomposer $\overrightarrow{BI}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
4. En déduire $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BI}$ et interpréter géométriquement.

Exercice 3 [7 points]

A et B deux points distincts du plan. On considère les points I et J tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB}$$

On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M du plan tel que $MA^2 - 4MB^2 = 0$.

1. Montrer que $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.
2. Montrer que $\overrightarrow{JA} - 2\overrightarrow{JB} = \vec{0}$.
3. En déduire que pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MI} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MJ}.$$

4. En déduire l'équivalence :

$$M \in \mathscr{E} \iff \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0.$$

   Puis déterminer la nature géométrique de l'ensemble $\mathscr{E}$.