Exercice 1

1. **Première méthode (lecture graphique et coordonnées) :**

   Par lecture graphique dans le repère orthonormé, on obtient les coordonnées des points suivants : $A(0\,;\,0)$, $B(7\,;\,0)$ et $C(5\,;\,5)$.
   On en déduit les coordonnées des vecteurs :

   $$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7-0\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5-0\\5-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$$

   Le repère étant orthonormé, on peut calculer le produit scalaire avec les coordonnées :

   $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=7\times5+0\times5=35+0=35$$

   Méthode alternative (projeté orthogonal) :
   Soit H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB). Graphiquement, $H(5\,;\,0)$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de même sens, donc :

   $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=AB\times AH=7\times5=35$$

   On obtient bien : $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=35}$

2. On calcule la distance AC à l'aide des coordonnées :

   $$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2}$$

   $$AC=\sqrt{(5-0)^2+(5-0)^2}=\sqrt{25+25}$$

   $$\boxed{AC=\sqrt{50}}$$

   Remarque : $\sqrt{50}=\sqrt{25\times2}=5\sqrt{2}$.

3. On sait d'après le cours que le produit scalaire peut s'écrire à l'aide du cosinus :

   $$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos(\widehat{BAC})$$

   En remplaçant par les valeurs calculées précédemment ($AB=7$, $AC=\sqrt{50}$ et le produit scalaire égal à 35) :

   $$35=7\times\sqrt{50}\times\cos(\widehat{BAC})$$

   $$\iff \cos(\widehat{BAC})=\frac{35}{7\sqrt{50}}$$

   $$\iff \cos(\widehat{BAC})=\frac{5}{\sqrt{50}}=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

En rendant le dénominateur rationnel :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On en déduit que la mesure géométrique de l'angle $\widehat{BAC}$ est :

$$\boxed{\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4} \text{ rad } \text{ (soit } 45°\text{)}}$$

Exercice 2

1. On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en fonction de x :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-1)-(-1) \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-2)-(-1) \\ (x-3)-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ x-5 \end{pmatrix}$$

Ainsi : $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x-1 \\ x-5 \end{pmatrix}}$

2. Le repère étant orthonormé, on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = x \times (x-1) + (-1) \times (x-5)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = x^2 - x - x + 5$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = x^2 - 2x + 5}$$

3. **a)** $f(x) = x^2 - 2x + 5$ est une fonction polynôme du second degré, dérivable sur $\mathbb{R}$.
Sa dérivée est $f'(x) = 2x - 2$.

Étudions le signe de $f'(x)$:

$$2x - 2 > 0 \iff 2x > 2 \iff x > 1$$

On calcule l'extremum : $f(1) = 1^2 - 2(1) + 5 = 1 - 2 + 5 = 4$.

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

b) D'après la question 2, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = f(x)$.
Le tableau de variations de f montre que la fonction admet un minimum absolu pour $x = 1$.
Le produit scalaire est donc bien minimal pour $\boxed{x = 1}$ et vaut 4.

Pour $x = 1$, déterminons les coordonnées des points :
$A(-1\,;\,2)\,;\,B(1-1\,;\,1) \implies B(0\,;\,1)\,;\,C(1-2\,;\,1-3) \implies C(-1\,;\,-2)$.

Calculons les distances AB et AC :

$$AB = \sqrt{(0-(-1))^2 + (1-2)^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1}$$

$$\boxed{AB = \sqrt{2}}$$

$$AC = \sqrt{(-1-(-1))^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = \sqrt{16}$$

$$\boxed{AC = 4}$$

Nous savons que pour $x = 1$, le produit scalaire vaut $f(1) = 4$. Or :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

$$4 = \sqrt{2} \times 4 \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

$$\iff \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La valeur de l'angle géométrique associé est de $\frac{\pi}{4}$.
Pour trouver l'angle *orienté*, on peut vérifier le signe du déterminant :
$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = 1 \times (-4) - (-1) \times 0 = -4$.
Le déterminant étant négatif, le sinus de l'angle orienté est négatif. On conclut donc que :

$$\boxed{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}}$$

Exercice 3

1. **a)** Le conteneur est un parallélépipède à base carrée de côté x et de hauteur y.
Son volume V est donné par : $V =$ Aire de la base $\times$ hauteur.

$$\boxed{V = x^2 \times y}$$

b) L'énoncé précise que le volume vaut $8\,\text{m}^3$. On a donc :

$$x^2 y = 8$$

Comme x représente une longueur, on a $x > 0$ (donc $x^2 \neq 0$). On peut isoler y en divisant par x^2 :

$$\boxed{y = \frac{8}{x^2}}$$

2. L'aire totale extérieure $A(x)$ correspond à la somme des aires des 6 faces du conteneur (les 4 parois latérales, la base et le plafond) :
   - La base et le plafond sont des carrés de côté x, leur aire totale est $2 \times x^2$.
   - Les 4 faces latérales sont des rectangles de dimensions x par y, leur aire totale est $4 \times (x \times y)$.

Ainsi, $A(x) = 2x^2 + 4xy$.
En remplaçant y par $\frac{8}{x^2}$ (trouvé à la question précédente) :

$$A(x) = 2x^2 + 4x\left(\frac{8}{x^2}\right)$$

$$A(x) = 2x^2 + \frac{32x}{x^2}$$

$$\boxed{A(x) = 2x^2 + \frac{32}{x}}$$

3. **a)** La fonction A est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ en tant que somme de fonctions de référence dérivables.
La dérivée de $2x^2$ est $4x$, et la dérivée de $\frac{32}{x} = 32 \times \frac{1}{x}$ est $32 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{32}{x^2}$.

$$\boxed{A'(x) = 4x - \frac{32}{x^2}}$$

b) Mettons $A'(x)$ au même dénominateur (x^2) :

$$A'(x) = \frac{4x \times x^2}{x^2} - \frac{32}{x^2}$$

$$A'(x) = \frac{4x^3 - 32}{x^2}$$

On factorise le numérateur par 4 :

$$\boxed{A'(x) = \frac{4(x^3 - 8)}{x^2}}$$

c) Développons l'expression $(x-2)(x^2+2x+4)$:

$$(x-2)(x^2+2x+4) = x(x^2+2x+4) - 2(x^2+2x+4)$$

$$= x^3 + 2x^2 + 4x - 2x^2 - 4x - 8$$

Les termes en x^2 et en x s'annulent ($2x^2 - 2x^2 = 0$ et $4x - 4x = 0$), il reste bien :

$$\boxed{x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)}$$

d) D'après la question b) et c), on peut écrire $A'(x)$ sous la forme :

$$A'(x) = \frac{4(x-2)(x^2+2x+4)}{x^2}$$

Pour tout $x \in]0\,;\,+\infty[$:

- Le dénominateur $x^2 > 0$.
- Le facteur constant $4 > 0$.
- Étudions le signe du trinôme $x^2 + 2x + 4$:
  Son discriminant est $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 4 = 4 - 16 = -12$.
  Puisque $\Delta < 0$ et que le coefficient devant x^2 est positif ($a = 1 > 0$), le trinôme est strictement positif pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $x^2 + 2x + 4 > 0$.

Par conséquent, le signe de $A'(x)$ dépend uniquement du signe de $(x-2)$.
Or $x - 2 = 0 \iff x = 2$.
Ainsi :

- $A'(x) < 0$ sur $]0\,;\,2[$
- $A'(x) = 0$ pour $x = 2$
- $A'(x) > 0$ sur $]2\,;\,+\infty[$

4. **a)** En utilisant le signe de la dérivée trouvé précédemment, on dresse le tableau de variations de la fonction A sur $]0\,;\,+\infty[$:

   On calcule d'abord la valeur du minimum :

$$A(2) = 2(2^2) + \frac{32}{2} = 2(4) + 16 = 8 + 16 = 24$$

x	0		2		$+\infty$
$A'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
$A(x)$	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	24	$\nearrow$	$+\infty$

b) Le coût du produit antirouille sera le moins cher lorsque l'aire des parois à peindre sera minimale.

D'après le tableau de variations, la fonction A admet un minimum absolu sur $]0\,;\,+\infty[$ pour $x = 2$.

La longueur de la base doit donc être de 2 m.

Calculons la hauteur correspondante avec la formule trouvée à la question 1.b) :

$$y = \frac{8}{2^2} = \frac{8}{4} = 2$$

Les dimensions du conteneur qui coûtera le moins cher sont donc de :

$\boxed{\text{2 m sur 2 m pour la base, et 2 m de hauteur}}$.

Il s'agit donc d'un cube d'arête 2 m.