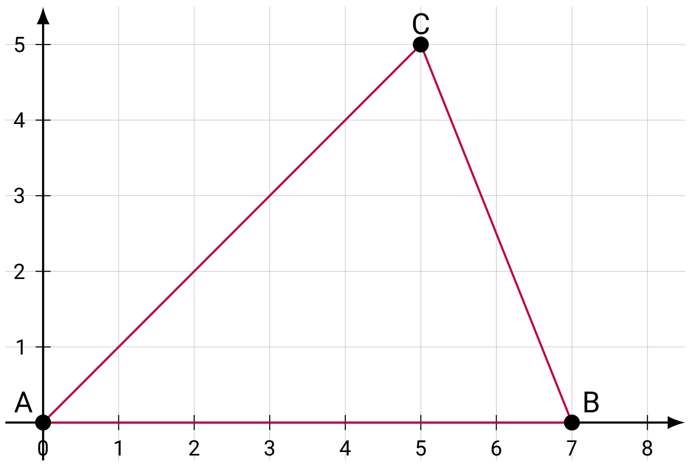
Exercice 1 : (... / 3 points) (temps conseillé 15 min)

Soit ABC le triangle représenté dans le repère orthonormé ci-dessous :



1. Par la méthode de votre choix déterminer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. Montrer que $AC = \sqrt{50}$.
3. Déduire, en utilisant une autre expression du produit scalaire, la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 2 : (... / 6 points) (temps conseillé 25 min)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit x un réel et soit $A(-1\,;\,2)$, $B(x-1\,;\,1)$ et $C(x-2\,;\,x-3)$ trois points du plan.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en fonction de x.
2. Exprimer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ en fonction de x.
3. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 5$.
   a) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$. (Tu peux demander un coup de pouce pour 0,5 point)
   b) En déduire que le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ est minimal pour $x = 1$.

   Calculer AB et AC, puis en déduire une valeur en radians de la mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ (dans le cas où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ est minimal).

Exercice 3 : (... / 6 points) (temps conseillé 25 min)

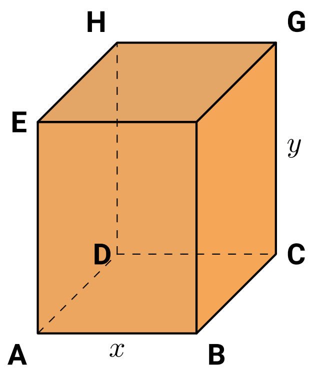
Un conteneur parallélépipède à base carrée a un volume de $8\,\mathrm{m}^3$. On veut protéger les parois extérieures par un produit antirouille.

On note x la longueur de la base et y la hauteur, exprimées en mètres. $x > 0$.

1. **a)** Exprimer le volume de ce conteneur.

   b) En déduire que $y = \dfrac{8}{x^2}$.

2. Vérifier que l'aire totale $A(x)$ des parois extérieures du conteneur en fonction de x est égale à $A(x) = 2x^2 + \dfrac{32}{x}$.



3. **a)** Déterminer, pour tout $x > 0$, $A'(x)$.

   b) Montrer que $A'(x) = \dfrac{4(x^3 - 8)}{x^2}$.

   c) Démontrer que $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$.

   d) En déduire le signe de A'.

4. **a)** Étudier le sens de variation de la fonction A sur $]0\,;+\infty[$.

   b) En déduire les dimensions du conteneur qui coûtera le moins cher en produit antirouille.