

**Exercice 1 : (2 points)**

Par définition du produit scalaire avec le cosinus de l'angle :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

En remplaçant par les valeurs données :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 5 \times 6 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

On sait que  $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ . Donc :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 30 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -15}$$

**Exercice 2 : (4 points)**

1) On calcule d'abord les coordonnées des vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  :

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 2 \\ 3 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 2 \\ -1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

On utilise l'expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormé  $(xx' + yy')$  :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2 \times (-4) + 0 \times (-4) = -8 + 0$$

$$\boxed{\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -8}$$

2) Calcul des normes à l'aide de la formule  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$  :

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{2^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\|\vec{AC}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\boxed{\|\vec{AB}\| = 2 \quad \text{et} \quad \|\vec{AC}\| = 4\sqrt{2}}$$

3) On utilise l'autre expression du produit scalaire liant normes et cosinus :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC})$$

En remplaçant par les valeurs trouvées :

$$-8 = 2 \times 4\sqrt{2} \times \cos(\widehat{BAC}) \iff -8 = 8\sqrt{2} \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$\iff \cos(\widehat{BAC}) = \frac{-8}{8\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

L'angle dont le cosinus vaut  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  sur l'intervalle  $[0; \pi]$  est  $\frac{3\pi}{4}$ .

$$\widehat{BAC} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad (soit } 135^\circ)$$

### Exercice 3 : (2 points)

Dans une base orthonormée, deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff 2 \times 3 + x \times (-5) = 0$$

$$\iff 6 - 5x = 0$$

$$\iff 5x = 6$$

$$\iff x = \frac{6}{5}$$

$$x = \frac{6}{5}$$

### Exercice 4 : (3 points)

On utilise les propriétés de bilinéarité et de symétrie du produit scalaire :

$$\bullet (2\vec{u}) \cdot \vec{v} = 2 \times (\vec{u} \cdot \vec{v}) = 2 \times (-2) = \boxed{-4}$$

$$\bullet \vec{u} \cdot (-5\vec{v}) = -5 \times (\vec{u} \cdot \vec{v}) = -5 \times (-2) = \boxed{10}$$

$$\bullet 3\vec{u} \cdot (\vec{v} + 4\vec{u}) = 3\vec{u} \cdot \vec{v} + 12\vec{u} \cdot \vec{u} = 3(\vec{u} \cdot \vec{v}) + 12\|\vec{u}\|^2 \\ = 3(-2) + 12(3^2) = -6 + 12 \times 9 = -6 + 108 = \boxed{102}$$

$$\bullet (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (2\vec{u} - \vec{v}) = 2\vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} \\ = 2\|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} - \|\vec{v}\|^2 = 2(3^2) + (-2) - (4^2) = 18 - 2 - 16 = \boxed{0}$$

### Exercice 5 : (5 points)

D'après la figure, les écarts entre les points sont de **2 carreaux** en abscisse et **2 carreaux** en ordonnée. On peut se placer dans le repère orthonormé défini par le quadrillage. Les coordonnées sont :  $A(1; 5), B(1; 1), C(5; 1), D(5; 5), E(1; 3), F(3; 5), G(5; 3), H(3; 1)$  et  $I(3; 3)$ .

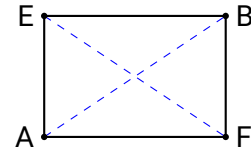
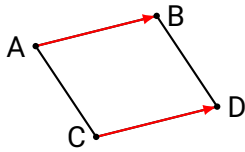
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG}$  : Le projeté orthogonal de  $G$  sur la droite  $(AB)$  est  $E$ .  
Donc  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$ . Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AE}$  sont colinéaires et de **même sens**.  
D'après les coordonnées, la longueur  $AB$  vaut 4 carreaux et  $AE$  vaut 2 carreaux.  
Donc  $AB \times AE = 4 \times 2 = \boxed{8}$ .
- $\overrightarrow{IF} \cdot \overrightarrow{GI}$  : La droite  $(IF)$  est verticale et  $(GI)$  est horizontale. Elles sont donc perpendiculaires. Les vecteurs sont orthogonaux, d'où  $\overrightarrow{IF} \cdot \overrightarrow{GI} = \boxed{0}$ .
- $\overrightarrow{GD} \cdot \overrightarrow{CD}$  : Les points  $C, G, D$  sont alignés.  $\overrightarrow{GD}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires et de **même sens**. La longueur  $GD = 2$  et  $CD = 4$ . Le produit de leurs longueurs est  $GD \times CD = 2 \times 4 = \boxed{8}$ .
- $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{CD}$  : Avec les coordonnées,  $\overrightarrow{EH} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ .  
 $\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{CD} = 2 \times 0 + (-2) \times 4 = \boxed{-8}$ .
- $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AD}$  : Avec les coordonnées,  $\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ .  
 $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AD} = 2 \times 4 + 2 \times 0 = \boxed{8}$ .
- $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC}$  **avec décomposition** : On décompose en passant par les points intermédiaires alignés avec la grille :  
 $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EA}$  et  $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GC}$ .  
Donc  $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC} = (\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EA}) \cdot (\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GC})$ .  
En développant :  $= \overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{GC}$ .  
Par lecture graphique,  $(IE) \perp (GC)$  et  $(EA) \perp (IG)$ , donc ces deux produits scalaires croisés sont nuls.  
Il reste :  $\overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{GC}$ .  
 $\overrightarrow{IE}$  et  $\overrightarrow{IG}$  sont opposés ( $IE = 2, IG = 2 \implies$  produit  $= -4$ ).  
De même,  $\overrightarrow{EA}$  et  $\overrightarrow{GC}$  sont colinéaires de sens contraire ( $EA = 2, GC = 2 \implies$  produit  $= -4$ ).  
Total  $= -4 - 4 = \boxed{-8}$ .

### Exercice 6 : (4 points)

1) *Rappel* : il faut ajouter une propriété manquante pour forcer la nature du quadrilatère.

- Un rectangle qui a **des diagonales perpendiculaires** (ou **deux côtés consécutifs égaux**) est un carré.
- Un parallélogramme dont les diagonales **sont perpendiculaires** est un losange.

2)



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  équivaut à dire que le quadrilatère  $ABDC$  est un parallélogramme (attention à l'ordre des sommets!).

Les segments  $[AB]$  et  $[EF]$  se coupent en leur milieu  $\implies$  c'est un parallélogramme. Ils sont de même longueur  $\implies$  c'est un rectangle. Le quadrilatère  $AEBF$  (ou  $AFBE$ ) est un **rectangle**.

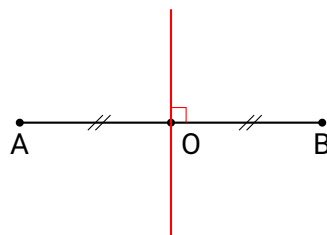
3) On cherche l'ensemble des points  $M$  tels que  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AO} = 0$ .

Ceci équivaut à dire que les vecteurs  $\overrightarrow{OM}$  et  $\overrightarrow{AO}$  sont orthogonaux. Ainsi, la droite  $(OM)$  est perpendiculaire à la droite  $(AO)$ .

Comme les points  $A, O, B$  sont alignés ( $O$  étant le milieu de  $[AB]$ ), la droite  $(OM)$  est perpendiculaire au segment  $[AB]$  et passe par son milieu  $O$ .

**L'ensemble cherché est la médiatrice du segment  $[AB]$ .**

$(\Delta)$  (ensemble des points  $M$ )



4)

- Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$ .  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = 6$ .

Le produit est positif, donc  $H \in [AB]$ .

$$AB \times AH = 6 \iff 2 \times AH = 6 \iff AH = 3.$$

De plus, on sait que la longueur  $AC = 3$ . Puisque le projeté  $H$  est situé à une distance de 3 de  $A$ , et que l'hypoténuse  $AC$  vaut 3, **les points  $C$  et  $H$  sont confondus**. Le point  $C$  est donc aligné sur  $(AB)$ , au-delà de  $B$ .

- Soit  $K$  le projeté orthogonal de  $D$  sur  $(AB)$ .  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AK} = -8$ .

Le produit est négatif, donc  $K$  est sur la demi-droite opposée à  $[AB]$ .

$$-AB \times AK = -8 \iff -2 \times AK = -8 \iff AK = 4.$$

Comme pour  $C$ , on sait que  $AD = 4$ . La distance  $AK = 4$  implique que **les points  $D$  et  $K$  sont confondus**. Le point  $D$  est donc aligné sur  $(AB)$ , à gauche de  $A$ .

