

Exercice 1 : Comportement d'une suite (3 points)

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{2}{3n+2}$.

1. a) Exprimons u_{n+1} puis calculons la différence $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} = \frac{2}{3(n+1)+2} = \frac{2}{3n+3+2} = \frac{2}{3n+5}$$

Ainsi :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3n+5} - \frac{2}{3n+2}$$

On met les deux fractions au même dénominateur en multipliant la première par $(3n+2)$ et la seconde par $(3n+5)$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2(3n+2)}{(3n+5)(3n+2)} - \frac{2(3n+5)}{(3n+5)(3n+2)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{6n+4 - (6n+10)}{(3n+5)(3n+2)}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{6n+4 - 6n - 10}{(3n+5)(3n+2)}$$

On obtient bien le résultat demandé :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-6}{(3n+5)(3n+2)}$$

- b) Pour déterminer le sens de variation de la suite, étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Comme $n \in \mathbb{N}$ (donc $n \geq 0$) :

- $3n \geq 0 \implies 3n+5 \geq 5 > 0$
- $3n \geq 0 \implies 3n+2 \geq 2 > 0$

Le dénominateur $(3n+5)(3n+2)$ est donc strictement positif en tant que produit de facteurs strictement positifs.

Le numérateur est -6 , qui est strictement négatif.

Par quotient, on en déduit que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n < 0$.

Conclusion : La suite (u_n) est strictement décroissante.

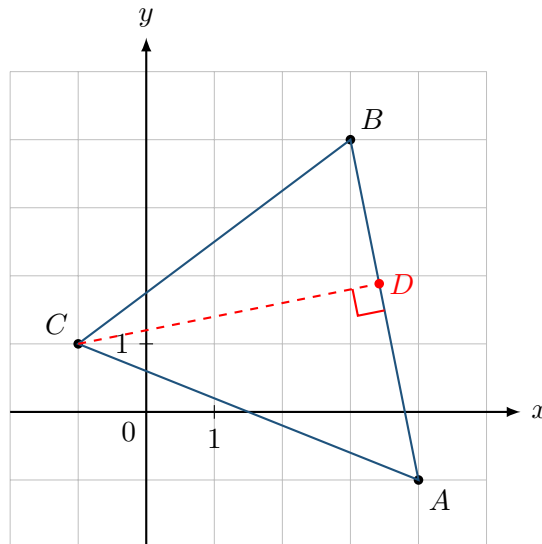
2. En utilisant la calculatrice, en saisissant l'expression de la suite ou en regardant les termes pour des valeurs de n de plus en plus grandes ($u_{10} \approx 0,0625$, $u_{100} \approx 0,0066$, $u_{1000} \approx 0,00066$), on observe que les valeurs se rapprochent de 0.

On peut donc conjecturer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

Exercice 2 : Produit scalaire en repère orthonormé (8 points)

Les points sont $A(4; -1)$, $B(3; 4)$ et $C(-1; 1)$.

1. Figure :



2. Calculons d'abord les coordonnées des vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} :

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{AB} \begin{pmatrix} 3 - 4 \\ 4 - (-1) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{AC} \begin{pmatrix} -1 - 4 \\ 1 - (-1) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{AC} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Le repère étant orthonormé, on peut utiliser la formule analytique du produit scalaire :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = x_{\vec{AB}} \times x_{\vec{AC}} + y_{\vec{AB}} \times y_{\vec{AC}}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-1) \times (-5) + 5 \times 2 = 5 + 10$$

$$\boxed{\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 15}$$

3. On sait également que : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.

Calculons les longueurs AB et AC :

$$AB = \sqrt{(-1)^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$$

$$AC = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

On a donc :

$$15 = \sqrt{26} \times \sqrt{29} \times \cos(\widehat{BAC}) \Leftrightarrow 15 = \sqrt{754} \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{15}{\sqrt{754}}$$

À l'aide de la calculatrice, on obtient : $\widehat{BAC} \approx 56,8^\circ$.

Au degré près, on a : $\boxed{\widehat{BAC} \approx 57^\circ}$

4. a) D est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) .

Par définition du produit scalaire par projection orthogonale, on a :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AD}$$

Puisque nous avons calculé à la question 2 que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 15$, on en déduit directement :

$$\boxed{\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 15}$$

- b) Comme $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 15 > 0$, les vecteurs \vec{AB} et \vec{AD} sont colinéaires et de même sens.
 Par conséquent, $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = AB \times AD$.

On a donc :

$$AB \times AD = 15 \iff \sqrt{26} \times AD = 15 \iff AD = \frac{15}{\sqrt{26}}$$

On retrouve bien : $\boxed{AD = \frac{15}{\sqrt{26}}}$

5. La hauteur issue de C dans le triangle ABC est le segment $[CD]$.

Le triangle ACD est rectangle en D . D'après le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 \iff CD^2 = AC^2 - AD^2$$

$$CD^2 = (\sqrt{29})^2 - \left(\frac{15}{\sqrt{26}}\right)^2$$

$$CD^2 = 29 - \frac{225}{26}$$

Mise au même dénominateur :

$$CD^2 = \frac{29 \times 26}{26} - \frac{225}{26} = \frac{754 - 225}{26} = \frac{529}{26}$$

La longueur CD est positive, donc :

$$CD = \sqrt{\frac{529}{26}} = \frac{\sqrt{529}}{\sqrt{26}}$$

Or $\sqrt{529} = 23$. La valeur exacte de la hauteur est donc : $\boxed{CD = \frac{23}{\sqrt{26}}}$

6. L'aire du triangle ABC est donnée par la formule : $\mathcal{A} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$

En prenant pour base le côté $[AB]$, la hauteur associée est $[CD]$.

$$\mathcal{A} = \frac{AB \times CD}{2} = \frac{\sqrt{26} \times \frac{23}{\sqrt{26}}}{2} = \frac{23}{2}$$

La valeur exacte de l'aire est : $\boxed{\mathcal{A} = \frac{23}{2} = 11,5 \text{ unités d'aire}}$

Exercice 3 : Géométrie métrique (6 points)

On a $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm et $\widehat{ABC} = 75^\circ$. I est le milieu de $[AB]$.

1. D'après le théorème d'Al-Kashi (ou loi des cosinus) appliqué dans le triangle ABC :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos(\widehat{ABC})$$

$$AC^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \cos(75^\circ)$$

$$AC^2 = 16 + 25 - 40 \cos(75^\circ)$$

$$AC^2 = 41 - 40 \cos(75^\circ)$$

À la calculatrice, $AC^2 \approx 41 - 40 \times 0,2588 \approx 30,65$.

$$AC = \sqrt{41 - 40 \cos(75^\circ)} \approx 5,536 \text{ cm.}$$

Arrondi à 0,1 cm près, on obtient : $AC \approx 5,5$ cm

2. Partons de la somme des carrés et utilisons la relation de Chasles avec les vecteurs donnés :

$$CB^2 + CA^2 = \overrightarrow{CB}^2 + \overrightarrow{CA}^2$$

$$CB^2 + CA^2 = (\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IA})^2$$

On développe avec les identités remarquables scalaires :

$$CB^2 + CA^2 = \overrightarrow{CI}^2 + 2\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 + \overrightarrow{CI}^2 + 2\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2$$

$$CB^2 + CA^2 = 2CI^2 + IB^2 + IA^2 + 2\overrightarrow{CI} \cdot (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA})$$

Or, I est le milieu de $[AB]$. On en déduit deux choses :

- $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$, donc le terme $2\overrightarrow{CI} \cdot (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA})$ s'annule.

- $IA = IB = \frac{AB}{2}$, donc $IA^2 + IB^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{AB^2}{4} + \frac{AB^2}{4} = \frac{2AB^2}{4} = \frac{1}{2}AB^2$.

En remplaçant, on obtient bien l'égalité (qui est le théorème de la médiane) :

$$CB^2 + CA^2 = 2CI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

3. Remplaçons par les valeurs connues et par la valeur exacte de AC^2 trouvée à la question 1 :

$$5^2 + (41 - 40 \cos(75^\circ)) = 2CI^2 + \frac{1}{2}(4^2)$$

$$25 + 41 - 40 \cos(75^\circ) = 2CI^2 + \frac{16}{2}$$

$$66 - 40 \cos(75^\circ) = 2CI^2 + 8$$

$$2CI^2 = 58 - 40 \cos(75^\circ)$$

$$CI^2 = 29 - 20 \cos(75^\circ)$$

À la calculatrice : $CI^2 \approx 23,82$.

Comme CI est une longueur ($CI > 0$) : $CI = \sqrt{29 - 20 \cos(75^\circ)} \approx 4,88$ cm.

Arrondi à 0,1 cm près : $CI \approx 4,9$ cm

4. On cherche l'ensemble (E) des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 12$.

Faisons intervenir le milieu I de $[AB]$ avec la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 12 \iff (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 12$$

Comme I est le milieu de $[AB]$, on a $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$. L'expression devient :

$$(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = 12$$

$$MI^2 - IA^2 = 12$$

On sait que $AB = 4$, donc $IA = \frac{4}{2} = 2$.

$$MI^2 - 2^2 = 12 \iff MI^2 - 4 = 12 \iff MI^2 = 16$$

Puisque MI est une distance (positive), $MI = \sqrt{16} = 4$.

L'ensemble (E) est l'ensemble des points situés à une distance de 4 du point I .

L'ensemble (E) est le cercle de centre I et de rayon $R = 4$.

Exercice 4 : QCM (3 points)

Explications détaillées pour chaque question (non exigées sur la copie de l'élève) :

Question 1 : Réponse a.

Par définition du produit scalaire avec le cosinus :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 5 \times 6 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

Sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 30 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 15\sqrt{2}.$$

Question 2 : Réponse d.

On développe le produit scalaire :

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (2\vec{u} - \vec{v}) = 2\vec{u}^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v}^2$$

Puisque le produit scalaire est symétrique ($\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$) et que $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$:

$$= 2\|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} - \|\vec{v}\|^2$$

Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux, donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

$$= 2 \times (2)^2 + 0 - (1)^2$$

$$= 2 \times 4 - 1 = 8 - 1 = 7.$$

Question 3 : Réponse b.

Introduisons le point B avec la relation de Chasles dans le vecteur \vec{AI} :

$$\vec{AD} \cdot \vec{AI} = \vec{AD} \cdot (\vec{AB} + \vec{BI})$$

$$\vec{AD} \cdot \vec{AI} = \vec{AD} \cdot \vec{AB} + \vec{AD} \cdot \vec{BI}$$

$ABCD$ étant un carré, les vecteurs \vec{AD} et \vec{AB} sont orthogonaux, donc $\vec{AD} \cdot \vec{AB} = 0$.

De plus, I appartient à $[BC]$ donc les vecteurs \vec{AD} et \vec{BI} sont colinéaires et de même sens (car $\vec{AD} = \vec{BC}$).

Comme I est le milieu de $[BC]$, $BI = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 6 = 3$.

Ainsi, $\vec{AD} \cdot \vec{BI} = AD \times BI = 6 \times 3 = 18$.

Finalement, le produit scalaire vaut $0 + 18 = 18$.