

Exercice 1
Géométrie dans l'espace

1. Les coordonnées du vecteur \overrightarrow{MN} s'obtiennent par la formule $(x_N - x_M; y_N - y_M; z_N - z_M)$:

$$\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ \frac{1}{2} - 1 \\ 1 - \frac{3}{4} \end{pmatrix} \iff \boxed{\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}}$$

De même pour le vecteur \overrightarrow{MP} :

$$\overrightarrow{MP} \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 0 - 1 \\ -\frac{5}{4} - \frac{3}{4} \end{pmatrix} \iff \boxed{\overrightarrow{MP} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

2. Si les points M, N et P étaient alignés, les vecteurs \overrightarrow{MN} et \overrightarrow{MP} seraient colinéaires, c'est-à-dire qu'il existerait un réel k tel que $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{MP}$.

En regardant la première coordonnée, on aurait $-1 = k \times 0$, ce qui équivaut à $-1 = 0$, ce qui est absurde.

Les vecteurs n'étant pas colinéaires, les points M, N et P ne sont pas alignés. Ils définissent donc bien un plan (MNP) .

3. (a) Dans le repère orthonormé, on calcule le produit scalaire avec les coordonnées :

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} = (-1) \times 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-1) + \frac{1}{4} \times (-2) = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Le produit scalaire étant nul, les vecteurs \overrightarrow{MN} et \overrightarrow{MP} sont orthogonaux.

On en déduit que le triangle MNP est rectangle en M .

- (b) L'aire d'un triangle rectangle en M est donnée par $\mathcal{A} = \frac{MN \times MP}{2}$.

Calculons les longueurs MN et MP :

- $MN = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{16 + 4 + 1}{16}} = \frac{\sqrt{21}}{4}$
- $MP = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{0 + 1 + 4} = \sqrt{5}$

Ainsi, $\mathcal{A} = \frac{\frac{\sqrt{21}}{4} \times \sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{105}}{8}$. $\mathcal{A}_{MNP} = \frac{\sqrt{105}}{8}$ unités d'aire

4. (a) Un vecteur est normal à un plan s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires directeurs de ce plan. Calculons :

- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{MN} = 5 \times (-1) - 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 \times \frac{1}{4} = -5 + 4 + 1 = 0$
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{MP} = 5 \times 0 - 8 \times (-1) + 4 \times (-2) = 0 + 8 - 8 = 0$

Le vecteur \vec{n} est orthogonal à \overrightarrow{MN} et \overrightarrow{MP} qui dirigent (MNP) .

\vec{n} est donc bien un vecteur normal au plan (MNP) .

- (b) Puisque $\vec{n}(5; -8; 4)$ est un vecteur normal à (MNP) , l'équation cartésienne du plan est de la forme :

$$5x - 8y + 4z + d = 0, \quad \text{avec } d \in \mathbb{R}$$

Le point $P\left(1; 0; -\frac{5}{4}\right)$ appartient au plan, ses coordonnées vérifient donc l'équation :

$$5(1) - 8(0) + 4\left(-\frac{5}{4}\right) + d = 0 \iff 5 - 0 - 5 + d = 0 \iff d = 0$$

Une équation cartésienne du plan (MNP) est bien : $5x - 8y + 4z = 0$

5. La droite d est orthogonale au plan (MNP) , elle admet donc le vecteur $\vec{n}(5; -8; 4)$ comme vecteur directeur. De plus, elle passe par $F(1; 0; 1)$.

Une représentation paramétrique de d est donc :

$$\begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -8t \\ z = 1 + 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

6. Le point L est le projeté orthogonal de F sur (MNP) , il est donc l'unique point d'intersection de la droite d et du plan (MNP) . Ses coordonnées $(x; y; z)$ sont les solutions du système formé par la représentation paramétrique de d et l'équation du plan :

$$5(1+5t) - 8(-8t) + 4(1+4t) = 0 \iff 5 + 25t + 64t + 4 + 16t = 0 \iff 105t + 9 = 0 \iff t = -\frac{9}{105} = -\frac{3}{35}$$

On remplace cette valeur de t dans les équations paramétriques de d :

$$\bullet x_L = 1 + 5\left(-\frac{3}{35}\right) = 1 - \frac{15}{35} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$$

$$\bullet y_L = -8\left(-\frac{3}{35}\right) = \frac{24}{35}$$

$$\bullet z_L = 1 + 4\left(-\frac{3}{35}\right) = 1 - \frac{12}{35} = \frac{23}{35}$$

Les coordonnées de L sont : $L\left(\frac{20}{35}; \frac{24}{35}; \frac{23}{35}\right)$ ou $\left(\frac{4}{7}; \frac{24}{35}; \frac{23}{35}\right)$.

7. Puisque L est sur la droite d définie par le paramètre $t = -\frac{3}{35}$ depuis le point F , on a $\overrightarrow{FL} = -\frac{3}{35}\vec{n}$.

$$FL = \|\overrightarrow{FL}\| = \left|-\frac{3}{35}\right| \times \|\vec{n}\| = \frac{3}{35} \sqrt{5^2 + (-8)^2 + 4^2} = \frac{3}{35} \sqrt{25 + 64 + 16} = \frac{3\sqrt{105}}{35}$$

Le volume V du tétraèdre $FMNP$ en prenant pour base le triangle rectangle MNP et pour hauteur FL est :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{MNP} \times FL = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{105}}{8} \times \frac{3\sqrt{105}}{35} = \frac{\sqrt{105} \times \sqrt{105}}{8 \times 35} = \frac{105}{280} = \frac{3}{8}$$

Exercice 2

Étude de fonction et optimisation

Partie A : exploitation du graphique.

1. Par lecture graphique, le point B de C_f a pour coordonnées $(-1; -2)$, donc $f(-1) = -2$.
 $f'(-1)$ correspond au coefficient directeur de la tangente T au point B . Cette droite passe par $B(-1; -2)$ et $A(0; -1)$. On a donc :

$$f'(-1) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-1 - (-2)}{0 - (-1)} = \frac{1}{1} \implies f'(-1) = 1$$

2. La courbe représentative d'une fonction convexe est toujours située au-dessus de ses tangentes. Or ici, la courbe C_f traverse sa tangente T au point B (elle est en dessous de T sur $] - 2; -1[$ et au-dessus sur $] - 1; +\infty[$).

La fonction f n'est donc pas convexe sur son ensemble de définition (le point B est un point d'inflexion).

Partie B : étude de la fonction f

1. Limite en -2 (par valeurs supérieures car $x > -2$) :

- $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 2x - 1) = (-2)^2 + 2(-2) - 1 = 4 - 4 - 1 = -1$
- $\lim_{x \rightarrow -2^+} (x + 2) = 0^+$, et on sait que $\lim_{X \rightarrow 0^+} \ln(X) = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow -2^+} \ln(x + 2) = -\infty$.

Par somme des limites, on a : $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$.

Graphiquement, cela signifie que la droite d'équation $x = -2$ est **asymptote verticale** à la courbe C_f .

2. f est dérivable sur $] - 2; +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables.

$$f'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x + 2}$$

On met au même dénominateur :

$$f'(x) = \frac{(2x + 2)(x + 2)}{x + 2} + \frac{1}{x + 2} = \frac{2x^2 + 4x + 2x + 4 + 1}{x + 2} \iff f'(x) = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}$$

3. Sur l'intervalle $] - 2; +\infty[$, le dénominateur $x + 2$ est strictement positif. Le signe de $f'(x)$ est donc celui du numérateur $2x^2 + 6x + 5$.

C'est un polynôme du second degré. Son discriminant est $\Delta = 6^2 - 4 \times 2 \times 5 = 36 - 40 = -4$.

Comme $\Delta < 0$ et $a = 2 > 0$, le polynôme est strictement positif pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi, **pour tout** $x > -2$, $f'(x) > 0$. La fonction f est strictement croissante.

x	-2	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

4. Sur l'intervalle $] -2; +\infty[$, la fonction f est :

- **Continue** (car dérivable),
- **Strictement croissante**,
- Elle prend ses valeurs dans \mathbb{R} (de $-\infty$ à $+\infty$).

Or $0 \in] -\infty; +\infty[$. D'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = 0$ admet une **unique solution** α sur $] -2; +\infty[$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve $f(0,11) \approx -0,02$ et $f(0,12) \approx 0,006$. L'arrondi à 10^{-2} près donne : $\boxed{\alpha \approx 0,12}$.

5. Puisque f est strictement croissante et s'annule en α , on en déduit immédiatement son signe :

- $\forall x \in] -2; \alpha[$, $f(x) < 0$
- $f(\alpha) = 0$
- $\forall x \in]\alpha; +\infty[$, $f(x) > 0$

x	-2	α	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

6. Pour étudier la convexité et l'inflexion, on calcule la dérivée seconde $f''(x)$ à partir de $f'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x+2}$:

$$f''(x) = 2 - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{2(x+2)^2 - 1}{(x+2)^2}$$

Sur $] -2; +\infty[$, $(x+2)^2 > 0$. Le signe de $f''(x)$ dépend de $2(x+2)^2 - 1$.

$$f''(x) = 0 \iff 2(x+2)^2 = 1 \iff (x+2)^2 = \frac{1}{2} \iff x+2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x+2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Or $x > -2 \iff x+2 > 0$, seule la solution positive est retenue : $x_0 = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx -1,29$.

La dérivée seconde s'annule et change de signe (polynôme du second degré) en cet unique point.

La courbe C_f admet donc un **unique point d'inflexion d'abscisse** $\boxed{-2 + \frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Partie C : une distance minimale.

1. Le point M appartient à C_g , ses coordonnées sont donc $M(x; \ln(x+2))$. Le point J a pour coordonnées $J(0; 1)$.

$$h(x) = JM^2 = (x_M - x_J)^2 + (y_M - y_J)^2 = (x-0)^2 + (\ln(x+2)-1)^2 \iff \boxed{h(x) = x^2 + [\ln(x+2) - 1]^2}$$

2. (a) On dérive h en utilisant la formule $(u^2)' = 2u'u$ pour le terme entre crochets :

$$h'(x) = 2x + 2 \times \left(\frac{1}{x+2} \right) \times [\ln(x+2) - 1] = 2x + \frac{2 \ln(x+2) - 2}{x+2}$$

On met sous le même dénominateur :

$$h'(x) = \frac{2x(x+2) + 2 \ln(x+2) - 2}{x+2} = \frac{2x^2 + 4x - 2 + 2 \ln(x+2)}{x+2} = \frac{2(x^2 + 2x - 1 + \ln(x+2))}{x+2}$$

On reconnaît l'expression de $f(x)$: $\boxed{h'(x) = \frac{2f(x)}{x+2}}$.

- (b) Pour tout $x \in]-2; +\infty[$, le dénominateur $x+2$ est strictement positif, et $2 > 0$. Le signe de $h'(x)$ est donc strictement le même que celui de $f(x)$, étudié à la **question B.5**.

x	-2	α	$+\infty$
$h'(x)$		- 0 +	
$h(x)$		↘ ↗	

- (c) Le tableau de variations montre que la fonction $h(x) = JM^2$ admet un **minimum global** atteint en $x = \alpha$. La fonction racine carrée étant strictement croissante, la distance $JM = \sqrt{h(x)}$ est également minimale en cette valeur. **La distance est donc minimale pour $x = \alpha$.**

3. (a) Par définition de α (question B.4), on sait que $f(\alpha) = 0$.

$$\alpha^2 + 2\alpha - 1 + \ln(\alpha + 2) = 0 \iff \boxed{\ln(\alpha + 2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2}$$

- (b) Deux droites de coefficients directeurs m_1 et m_2 sont perpendiculaires si et seulement si $m_1 \times m_2 = -1$.

- Le coefficient directeur de la tangente à C_g en M_α est le nombre dérivé $g'(\alpha) = \frac{1}{\alpha+2}$ (on appelle m_1 ce coefficient).
- La droite (JM_α) passe par $J(0; 1)$ et $M_\alpha(\alpha; \ln(\alpha+2))$. Son coefficient directeur m_2 est :

$$m_2 = \frac{y_{M_\alpha} - y_J}{x_{M_\alpha} - x_J} = \frac{\ln(\alpha+2) - 1}{\alpha - 0}$$

D'après la question précédente, en remplaçant $\ln(\alpha + 2)$ par $1 - 2\alpha - \alpha^2$:

$$m_2 = \frac{1 - 2\alpha - \alpha^2 - 1}{\alpha} = \frac{-\alpha(2 + \alpha)}{\alpha} = -(2 + \alpha)$$

On calcule alors le produit $m_1 \times m_2$:

$$m_1 \times m_2 = \frac{1}{\alpha + 2} \times (-(\alpha + 2)) = -1$$

Leur produit valant -1 , **la tangente à C_g en M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires.**

Exercice 3

Probabilités

Partie A

- D'après l'énoncé, 5,7% de la population a été infectée. Donc $P(I) = 0,057$.
- (a) On répète 100 fois de manière identique et indépendante (tirage assimilé à un tirage avec remise) une épreuve de Bernoulli qui n'admet que deux issues : l'individu a été infecté (succès, $p = 0,057$) ou non. X compte le nombre de succès. X **suit donc la loi binomiale de paramètres** $n = 100$ **et** $p = 0,057$.

- (b) L'espérance mathématique d'une loi binomiale est donnée par $E(X) = n \times p = 100 \times 0,057 = 5,7$.

Interprétation : Sur un échantillon de 100 personnes, on s'attend à trouver en moyenne 5,7 personnes (soit environ 5 à 6 personnes) ayant déjà été infectées.

- (c) Probabilité de n'avoir aucune personne infectée ($X = 0$) :

$$P(X = 0) = \binom{100}{0} p^0 (1 - p)^{100} = (1 - 0,057)^{100} = 0,943^{100} \approx 0,0028$$

- (d) Probabilité d'avoir au moins 2 personnes infectées ($X \geq 2$) :

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

$$P(X = 1) = \binom{100}{1} \times 0,057^1 \times 0,943^{99} = 100 \times 0,057 \times 0,943^{99} \approx 0,0170$$

$$P(X \geq 2) \approx 1 - (0,0028 + 0,0170) = 1 - 0,0198 \approx 0,9802$$

- (e) À l'aide de la calculatrice (menu Statistiques/Distributions binomiales cumulées) :

- $P(X \leq 8) \approx 0,884$
- $P(X \leq 9) \approx 0,941$

Le plus petit entier n est donc $n = 9$.

Interprétation : Il y a plus de 90 % de chances que, dans cet échantillon de 100 personnes, 9 au maximum aient déjà été infectées par la COVID 19.

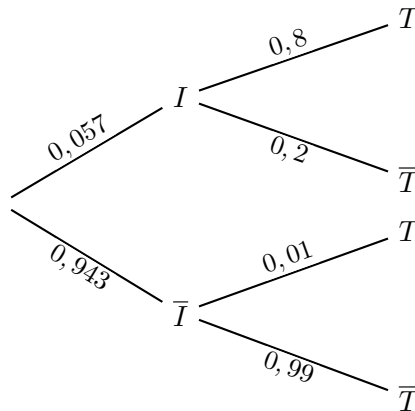
Partie B :

1. La sensibilité est la probabilité d'avoir un test positif sachant que la personne est infectée :

$$P_I(T) = 0,8.$$

La spécificité est la probabilité d'avoir un test négatif sachant que la personne n'est pas infectée :

$$P_{\bar{I}}(\bar{T}) = 0,99.$$



2. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(T) = P(I \cap T) + P(\bar{I} \cap T) = P(I) \times P_I(T) + P(\bar{I}) \times P_{\bar{I}}(T)$$

$$P(T) = 0,057 \times 0,8 + 0,943 \times 0,01 = 0,0456 + 0,00943 = \boxed{0,05503}$$

3. On cherche la probabilité conditionnelle $P_T(I)$ (probabilité d'être infecté sachant que le test est positif).

$$P_T(I) = \frac{P(T \cap I)}{P(T)} = \frac{0,0456}{0,05503} \approx \boxed{0,8286}$$

Partie C : Notons $x = P(I)$ la probabilité qu'un individu de ce nouveau groupe ait été infecté. La proportion de tests positifs s'écrit, en utilisant les probabilités totales :

$$P(T) = P(I \cap T) + P(\bar{I} \cap T) \iff 0,2944 = x \times 0,8 + (1 - x) \times 0,01$$

On résout cette équation :

$$0,2944 = 0,8x + 0,01 - 0,01x \iff 0,2944 - 0,01 = 0,79x \iff 0,2844 = 0,79x \iff x = \frac{0,2844}{0,79} = 0,36$$

La probabilité qu'un individu de ce groupe ait été infecté est de 36 %.

$$\boxed{p = 0,36}$$

Exercice 4
Suites et Python
1. Affirmation 1 : Vraie

Exprimons w_{n+1} en fonction de w_n :

$$w_{n+1} = t_{n+1} - 10 = (-0,8t_n + 18) - 10 = -0,8t_n + 8$$

Or $w_n = t_n - 10 \iff t_n = w_n + 10$. On remplace t_n dans l'expression :

$$w_{n+1} = -0,8(w_n + 10) + 8 = -0,8w_n - 8 + 8 = -0,8w_n$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , $w_{n+1} = -0,8w_n$. La suite (w_n) est bien géométrique de raison $q = -0,8$.

2. Affirmation 2 : Vraie

Puisque $3n - 4 \leq S_n \leq 3n + 4$, en divisant par n (qui est strictement positif pour $n \geq 1$), on obtient :

$$\frac{3n - 4}{n} \leq u_n \leq \frac{3n + 4}{n} \iff 3 - \frac{4}{n} \leq u_n \leq 3 + \frac{4}{n}$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{4}{n}\right) = 3 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{4}{n}\right) = 3.$$

D'après le **théorème des gendarmes**, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$. La suite converge.

3. Affirmation 3 : Vraie

Démontrons la propriété $P(n)$: " $v_n = \frac{n+1}{n}$ ", par récurrence sur $n \geq 1$.

- **Initialisation** : Pour $n = 1$, $v_1 = 2$ et $\frac{1+1}{1} = 2$. $P(1)$ est vraie.
- **Hérédité** : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain entier $n \geq 1$. Montrons $P(n+1)$:

$$v_{n+1} = 2 - \frac{1}{v_n} = 2 - \frac{1}{\frac{n+1}{n}} = 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{2(n+1) - n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = \frac{(n+1)+1}{n+1}$$

$P(n+1)$ est donc vraie. Par le principe de récurrence, l'affirmation est vraie pour tout $n \geq 1$.

4. Affirmation 4 : Fausse

On peut factoriser par e^n pour lever la forme indéterminée " $\infty - \infty$ " :

$$u_n = e^n - n = e^n \left(1 - \frac{n}{e^n}\right)$$

Par croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$, donc par passage à l'inverse $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n} = 0$.

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{n}{e^n}\right) = 1$.

Et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$, par produit de limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

La suite diverge.

5. Affirmation 5 : Vraie

Le script calcule les termes de la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 0,5 \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$.

On admet que (u_n) est décroissante et minorée (par $\sqrt{2}$). D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite finie ℓ .

La fonction $f(x) = 0,5 \left(x + \frac{2}{x} \right)$ étant continue sur $]0; +\infty[$, la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

$$\ell = 0,5 \left(\ell + \frac{2}{\ell} \right) \iff 2\ell = \ell + \frac{2}{\ell} \iff \ell = \frac{2}{\ell} \iff \ell^2 = 2$$

Comme $u_n \geq \sqrt{2}$, on a $\ell \geq \sqrt{2}$, et on ne retient que la racine positive : $\boxed{\ell = \sqrt{2}}$.

6. Affirmation 6 : Fausse

Analysons précisément la boucle `while` du script :

- Initialisation : $u = 2$ correspond à u_1 , et on a $n = 1$.
- Condition de boucle : on teste l'écart avec la valeur **actuelle** de u qui est u_n .
- Si la condition est vérifiée, on calcule dans la boucle la valeur **suivante** $u = u_{n+1}$ (parce qu'on remplace n par sa valeur, ici 1, et on obtient $(1 + 1/1)^1$ qui est réaffecté dans u). Puis n est incrémenté.

Dès lors, supposons que k soit le plus petit entier tel que $|u_k - e| < 10^{-6}$.

À l'itération $n = k - 1$, la condition du `while` (testée sur u_{k-1}) est vraie. On rentre dans la boucle : u prend la valeur u_k , puis n est augmenté de 1 et prend la valeur $(k - 1) + 1 = k$. La boucle termine son cycle.

Puis le test du `while` se relance. Cette fois il s'effectue sur $u = u_k$. La condition $|u_k - e| \geq 10^{-6}$ est ****fausse****. La boucle s'arrête net sans y rentrer.

À la sortie de la boucle, la fonction renvoie la variable n . Or, pour faire basculer la condition, c'est que u_k vient d'être calculé en remplaçant la valeur précédente de n . Dans la foulée, avant de reboucler pour le test, la variable n a été incrémentée à $k + 1$.

La fonction renvoie donc $n = k + 1$, et non le plus petit entier k .

(Il s'agit d'un classique problème de variable incrémentée "trop tôt" par rapport au moment de l'arrêt).