

Le seul appareil électronique autorisé est la calculatrice en position examen.

Tous les autres appareils électroniques sont interdits, y compris les montres connectées, et doivent être mis dans votre sac.

Les documents papiers sont aussi interdits.

Le non-respect des consignes précédentes sera sanctionné par un zéro.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur sa copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

8 points

On considère le cube $ABCDEFGH$ qui est représenté en dessous du sujet.

Dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on considère les points M, N et P de coordonnées :

$$M\left(1; 1; \frac{3}{4}\right), \quad N\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), \quad P\left(1; 0; -\frac{5}{4}\right)$$

Dans cet exercice, on se propose de calculer le volume du tétraèdre $FMNP$.

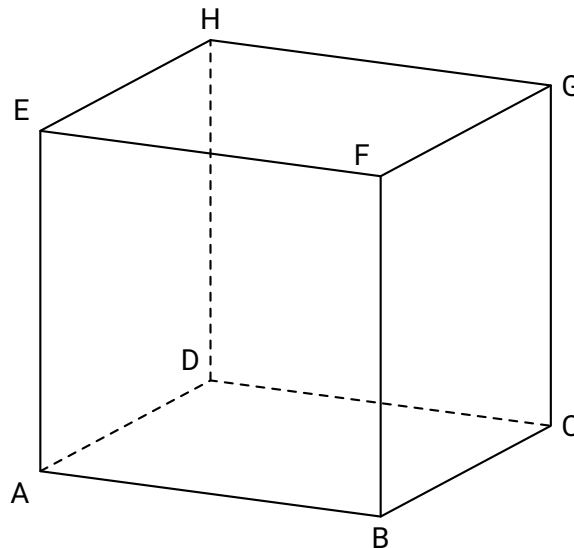
1. Donner les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{MN} et \overrightarrow{MP} .
2. Justifier que les points M, N et P ne sont pas alignés.
Dès lors les trois points définissent le plan (MNP) .
3. (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$, puis en déduire la nature du triangle MNP .
(b) Calculer l'aire du triangle MNP .
4. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (MNP) .
(b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (MNP) est :

$$5x - 8y + 4z = 0$$

5. On rappelle que le point F a pour coordonnées $F(1; 0; 1)$.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite d orthogonale au plan (MNP) et passant par le point F .
6. On note L le projeté orthogonal du point F sur le plan (MNP) .
Déterminer les coordonnées du point L .

7. Montrer que $FL = \frac{3\sqrt{105}}{35}$ puis calculer le volume du tétraèdre $FMNP$.
 On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire d'une base} \times \text{hauteur associée à cette base.}$$



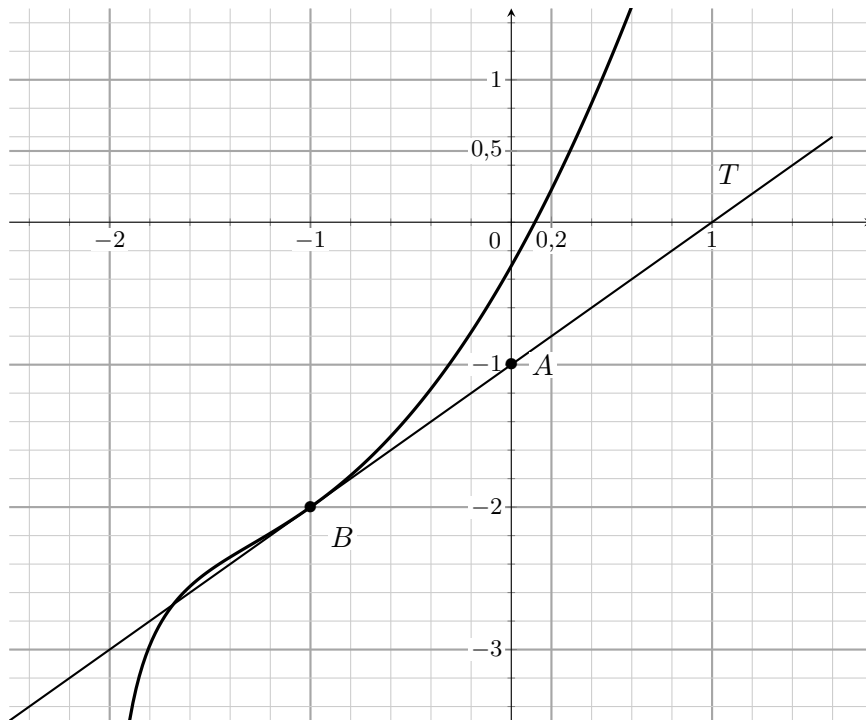
Exercice 2

12 points

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $] -2; +\infty[$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

On a tracé ci-dessous la courbe C_f et sa tangente T au point B d'abscisse -1 .

On précise que la droite T passe par le point $A(0; -1)$.


Partie A : exploitation du graphique.

À l'aide du graphique, répondre aux questions ci-dessous.

1. Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.
2. La fonction f est-elle convexe sur son ensemble de définition? Justifier.

Partie B : étude de la fonction f

On considère que la fonction f est définie sur $] -2; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x + 2)$$

où \ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Déterminer par le calcul la limite de la fonction f en -2 . Interpréter graphiquement ce résultat.
On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
2. Montrer que pour tout $x > -2$, $f'(x) = \frac{2x^2 + 6x + 5}{x + 2}$.
3. Étudier les variations de la fonction f sur $] -2; +\infty[$ puis dresser son tableau de variations complet.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $] -2; +\infty[$ et donner une valeur arrondie de α à 10^{-2} près.
5. En déduire le signe de $f(x)$ sur $] -2; +\infty[$.
6. Montrer que C_f admet un unique point d'inflexion et déterminer son abscisse.

Partie C : une distance minimale.

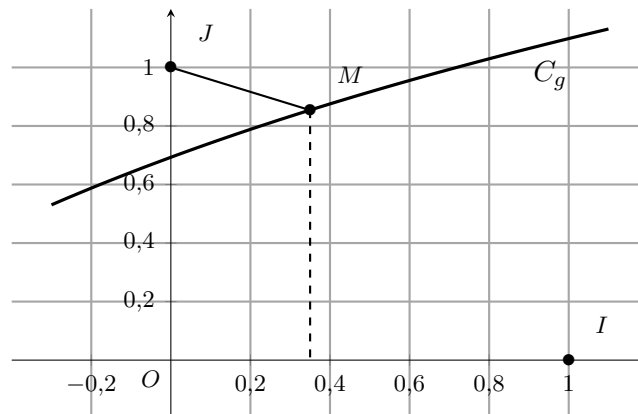
Soit g la fonction définie sur $] - 2 ; +\infty[$ par $g(x) = \ln(x + 2)$.

On note C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; I, J)$, représentée ci-après.

Soit M un point de C_g d'abscisse x .

Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de x la distance JM est minimale.

On considère la fonction h définie sur $] - 2 ; +\infty[$ par $h(x) = JM^2$.



- Justifier que pour tout $x > -2$, on a : $h(x) = x^2 + [\ln(x + 2) - 1]^2$.
- On admet que la fonction h est dérivable sur $] - 2 ; +\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.

(a) Prouver que tout réel $x > -2$:

$$h'(x) = \frac{2f(x)}{x + 2}$$

où f est la fonction étudiée en **partie B**.

(b) Dresser le tableau de variations de h sur $] - 2 ; +\infty[$.

Les limites ne sont pas demandées.

(c) En déduire que la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est α où α est le nombre réel défini à la question **4.** de la **partie B**.

3. On notera M_α le point de C_g d'abscisse α .

(a) Montrer que $\ln(\alpha + 2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.

(b) En déduire que la tangente à C_g au point M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires.

Exercice 3

11 points

Dans la revue *Lancet Public Health*, les chercheurs affirment qu'au 11 mai 2020, 5,7% des adultes français avaient déjà été infectés par la COVID 19.

Source : [https://www.thelancet.com/journals/lanpub/article/PIIS2468-2667\(21\)00064-5/fulltext](https://www.thelancet.com/journals/lanpub/article/PIIS2468-2667(21)00064-5/fulltext)

On se servira de cette donnée pour les parties A et B de cet exercice.

Partie A

1. On prélève un individu dans la population française adulte au 11 mai 2020.
On note I l'événement : « l'adulte a déjà été infecté par la COVID 19 »
Quelle est la probabilité que cet individu prélevé ait déjà été infecté par la COVID 19 ?
2. On prélève un échantillon de 100 personnes de la population supposées choisies de façon indépendante les unes des autres.
On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise.
On appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes ayant déjà été infectées.
 - (a) Justifiez que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
 - (b) Calculer son espérance mathématique. Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.
 - (c) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune personne infectée dans l'échantillon ?
On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.
 - (d) Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 2 personnes infectées dans l'échantillon ?
On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.
 - (e) Déterminer le plus petit entier n tel que $P(X \leq n) > 0,9$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B :

Un test a été mis en place : celui-ci permet de déterminer (même longtemps après l'infection), si une personne a ou non déjà été infectée par la COVID 19.

Si le test est positif, cela signifie que la personne a déjà été infectée par la COVID 19.

Deux paramètres permettent de caractériser ce test : sa sensibilité et sa spécificité.

La sensibilité d'un test est la probabilité qu'il soit positif sachant que la personne a été infectée par la maladie. (Il s'agit donc d'un vrai positif).

La spécificité d'un test est la probabilité que le test soit négatif sachant que la personne n'a pas été infectée par la maladie. (Il s'agit donc d'un vrai négatif).

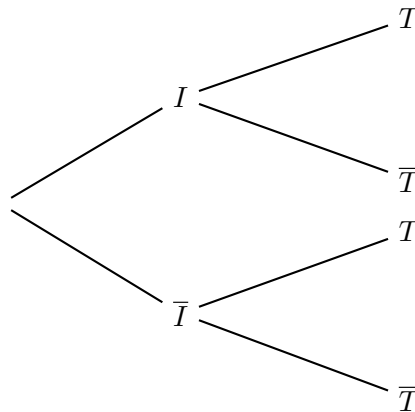
Le fabricant du test fournit les caractéristiques suivantes :

- Sa sensibilité est de 0,8 ;
- Sa spécificité est de 0,99.

On prélève un individu soumis au test dans la population française adulte au 11 mai 2020.

On note T l'événement « le test réalisé est positif ».

1. Compléter l'arbre des probabilités ci-dessous avec les données de l'énoncé :



2. Montrer que $p(T) = 0,05503$.
3. Quelle est la probabilité qu'un individu ait été infecté sachant que son test est positif ?
On donnera une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat.

Partie C :

On considère un groupe d'une population d'un autre pays soumis au même test de sensibilité 0,8 et de spécificité 0,99.

Dans ce groupe la proportion d'individus ayant un test positif est de 29,44%.

On choisit au hasard un individu de ce groupe; quelle est la probabilité qu'il ait été infecté ?

Exercice 4

9 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Les six questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère une suite (t_n) vérifiant la relation de récurrence :

$$\text{pour tout entier naturel } n, t_{n+1} = -0,8t_n + 18.$$

Affirmation 1 : La suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = t_n - 10$ est géométrique.

2. On considère une suite (S_n) qui vérifie pour tout entier naturel n non nul :

$$3n - 4 \leq S_n \leq 3n + 4.$$

La suite (u_n) est définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = \frac{S_n}{n}$.

Affirmation 2 : La suite (u_n) converge.

3. On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_1 = 2 \text{ et pour tout entier naturel } n \geq 1, v_{n+1} = 2 - \frac{1}{v_n}.$$

Affirmation 3 : Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_n = \frac{n+1}{n}$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = e^n - n$.

Affirmation 4 : La suite (u_n) converge.

5. On considère la suite (u_n) définie à l'aide du script écrit ci-dessous en langage Python, qui renvoie la valeur de u_n .