

Correction - Exercice 1

Étude de la fonction t :

La fonction t est définie sur $\mathbb{R}$ par $t(x) = xe^{2x}$.

- La fonction $x \mapsto 2x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composition avec la fonction exponentielle, la fonction $x \mapsto e^{2x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Ainsi, par produit, la fonction t est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On pose $u(x) = x$ et $v(x) = e^{2x}$.

On a alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2e^{2x}$.

En appliquant la formule de dérivation d'un produit $(uv)' = u'v + uv'$, on obtient pour tout réel x :

$$t'(x) = 1 \times e^{2x} + x \times 2e^{2x}$$

$$t'(x) = e^{2x}(1 + 2x)$$

$$t'(x) = (2x + 1)e^{2x}$$

Étude de la fonction w :

La fonction w est définie par $w(x) = \frac{e^{-x}}{x+1}$.

- Le dénominateur s'annule pour $x + 1 = 0 \iff x = -1$.
- La fonction $x \mapsto -x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc par composition $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Le dénominateur $x \mapsto x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- Par quotient, la fonction w est donc dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

On pose $u(x) = e^{-x}$ et $v(x) = x + 1$.

On a alors $u'(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = 1$.

En appliquant la formule de dérivation d'un quotient $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, on obtient pour tout réel $x \neq -1$:

$$w'(x) = \frac{-e^{-x}(x+1) - e^{-x} \times 1}{(x+1)^2}$$

$$w'(x) = \frac{e^{-x}[-(x+1) - 1]}{(x+1)^2}$$

$$w'(x) = \frac{e^{-x}(-x-2)}{(x+1)^2}$$

$$w'(x) = \frac{-(x+2)e^{-x}}{(x+1)^2}$$

Correction - Exercice 2

1. Démontrons l'égalité pour tout réel x . En multipliant le numérateur et le dénominateur de la fraction par e^x (qui est strictement positif donc non nul), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+e^{-x}} &= \frac{1 \times e^x}{(1+e^{-x}) \times e^x} \\ &= \frac{e^x}{1 \times e^x + e^{-x} \times e^x} \\ &= \frac{e^x}{e^x + e^0}\end{aligned}$$

Comme $e^0 = 1$, on a bien :

$$\boxed{\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{1+e^x}}$$

2. Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{2x+1} < \frac{1}{e^x}$.

Pour tout réel x , on sait que $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$. L'inéquation devient donc :

$$e^{2x+1} < e^{-x}$$

La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on peut identifier les exposants en conservant le sens de l'inégalité :

$$2x + 1 < -x$$

$$3x + 1 < 0$$

$$3x < -1$$

$$x < -\frac{1}{3}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc :

$$\boxed{S = \left] -\infty ; -\frac{1}{3} \right[}$$

3. Étudions le sens de variation de la suite (u_n) .

Pour tout entier naturel n , on peut comparer $1 - 2(n+1)$ et $1 - 2n$:

$$1 - 2(n+1) = 1 - 2n - 2 = -2n - 1$$

On a clairement $-2n - 1 < 1 - 2n$.

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que :

$$e^{1-2(n+1)} < e^{1-2n}$$

En soustrayant 1 de chaque côté, l'inégalité est conservée :

$$e^{1-2(n+1)} - 1 < e^{1-2n} - 1$$

Soit $u_{n+1} < u_n$.

On conclut que la suite (u_n) est strictement décroissante.

Correction - Exercice 3

1. La fonction f définie par $f(x) = e^x - x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

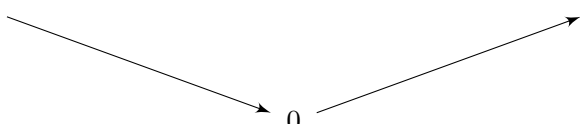
Pour tout réel x , sa dérivée est :

$$f'(x) = e^x - 1$$

Étudions le signe de $f'(x)$:

- $f'(x) = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0$
- $f'(x) > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$ (car la fonction $\ln$ est strictement croissante ou car $e^0 = 1$)

On en déduit le tableau de variations de f (les limites ne sont pas attendues en Première) :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
Variations de f			

Calcul du minimum : $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$.

D'après le tableau de variations, le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est 0.

On en déduit que pour tout réel x , $f(x) \geq 0$.

$$\begin{aligned}
 f(x) \geq 0 &\iff e^x - x - 1 \geq 0 \\
 &\iff e^x \geq 1 + x
 \end{aligned}$$

Ainsi, $1 + x \leq e^x$ pour tout réel x .

2. Démontrons l'inégalité pour tout réel $x < 1$.

D'après la question 1, l'inégalité $1 + X \leq e^X$ est vraie pour tout réel X .

Posons $X = -x$. On a alors :

$$1 - x \leq e^{-x}$$

Ce qui s'écrit encore :

$$1 - x \leq \frac{1}{e^x}$$

Comme $e^x > 0$ pour tout réel x , on peut multiplier les deux membres par e^x sans changer le sens de l'inégalité :

$$(1 - x)e^x \leq 1$$

Puisque nous avons supposé que $x < 1$, on a $1 - x > 0$. On peut donc diviser par $(1 - x)$ de chaque côté sans changer le sens de l'inégalité :

$$e^x \leq \frac{1}{1 - x}$$

3. Soit n un entier tel que $n \geq 1$.

On pose $x = \frac{1}{n}$. Comme $n \geq 1$, on a $x \in \mathbb{R}$.

D'après la question 1, on sait que $1 + x \leq e^x$. En remplaçant x par $\frac{1}{n}$, on obtient :

$$1 + \frac{1}{n} \leq e^{\frac{1}{n}}$$

Comme $n \geq 1$, les deux membres de cette inégalité sont strictement positifs.

La fonction puissance $t \mapsto t^n$ étant strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$, on peut élever les deux membres à la puissance n en conservant l'ordre :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n$$

Or, d'après les propriétés de l'exponentielle, $\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n = e^{\frac{1}{n} \times n} = e^1 = e$.

On en déduit bien que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$$