

Exercice 1**[6 points]**

Étudier la dérivabilité de la fonction et calculer l'expression de sa fonction dérivée dans les cas suivants :

$$t(x) = xe^{2x}$$

$$w(x) = \frac{e^{-x}}{x+1}$$

Exercice 2**[7 points]**

1. Démontrer que, pour tout réel x , on a :

$$\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{1+e^x}$$

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$e^{2x+1} < \frac{1}{e^x}$$

3. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

$$u_n = e^{1-2n} - 1$$

Exercice 3**[7 points]**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - x - 1$$

- Étudier les variations de la fonction f et en déduire que $1+x \leq e^x$ pour tout réel x .
- En déduire que pour tout réel $x < 1$:

$$e^x \leq \frac{1}{1-x}.$$

- Déduire de la question 1) que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e.$$