

Exercice 1

- 1) Déterminons d'abord les probabilités des genres musicaux sous forme de fractions irréductibles : $P(C) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$.

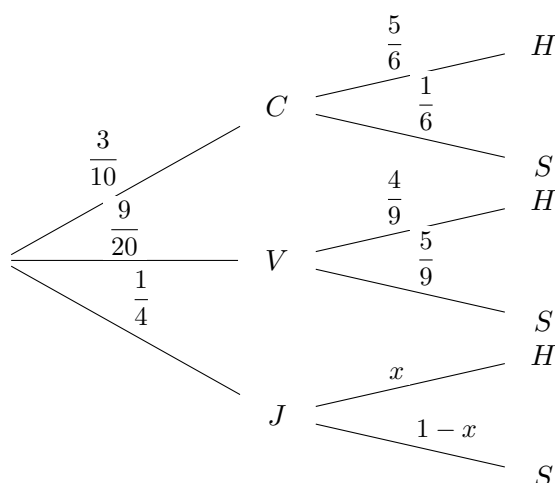
$$P(V) = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}.$$

$$P(J) = 1 - (P(C) + P(V)) = 1 - \left(\frac{6}{20} + \frac{9}{20} \right) = 1 - \frac{15}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}.$$

De plus, l'énoncé indique : $P_C(H) = \frac{5}{6} \implies P_C(S) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$.

$$P_V(S) = \frac{5}{9} \implies P_V(H) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}.$$

L'arbre pondéré de la situation est donc :



- 2) On cherche $P(C \cap H)$. D'après la formule des probabilités composées :

$$P(C \cap H) = P(C) \times P_C(H) = \frac{3}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$$

La probabilité que Thomas écoute un morceau de musique classique encodé en haute qualité est de $\boxed{\frac{1}{4}}$ (soit 0,25).

- 3) On sait que $P(H) = \frac{13}{20}$.

Les événements C , V et J forment une partition de l'univers. D'après la loi des probabilités totales :

$$P(H) = P(C \cap H) + P(V \cap H) + P(J \cap H)$$

Calculons d'abord $P(V \cap H)$:

$$P(V \cap H) = P(V) \times P_V(H) = \frac{9}{20} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

Et $P(J \cap H) = P(J) \times P_J(H) = \frac{1}{4} \times x = \frac{1}{4}x$.

En remplaçant dans la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\frac{13}{20} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4}x \\ \Leftrightarrow \frac{13}{20} &= \frac{5}{20} + \frac{4}{20} + \frac{1}{4}x \\ \Leftrightarrow \frac{13}{20} &= \frac{9}{20} + \frac{1}{4}x \\ \Leftrightarrow \frac{13}{20} - \frac{9}{20} &= \frac{1}{4}x \\ \Leftrightarrow \frac{4}{20} &= \frac{1}{4}x \\ \Leftrightarrow \frac{1}{5} &= \frac{1}{4}x \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}\end{aligned}$$

La probabilité que le morceau soit encodé en haute qualité sachant que c'est du jazz est $P_J(H) = \frac{4}{5}$.

4) On cherche à calculer $P_H(V)$.

Par définition des probabilités conditionnelles :

$$P_H(V) = \frac{P(V \cap H)}{P(H)}$$

D'après les questions précédentes, on a $P(V \cap H) = \frac{1}{5}$ (soit $\frac{4}{20}$) et $P(H) = \frac{13}{20}$.

$$P_H(V) = \frac{\frac{4}{20}}{\frac{13}{20}} = \frac{4}{20} \times \frac{20}{13} = \frac{4}{13}$$

La probabilité que ce soit un morceau de variété sachant qu'il est en haute qualité est de $\frac{4}{13}$.

Exercice 2

1. Affirmation 1 : Vraie.

Justification : On utilise la formule liant la réunion et l'intersection :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0,94 = 0,8 + 0,7 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 1,5 - 0,94 = 0,56$$

D'autre part, calculons le produit des probabilités de A et B :

$$P(A) \times P(B) = 0,8 \times 0,7 = 0,56$$

Puisque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, les évènements A et B sont bien indépendants.

2. Affirmation 2 : Vraie.

Justification : Déterminons l'équation réduite de la droite (AB) . Le coefficient directeur m de (AB) est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{15 - 6}{2 - (-4)} = \frac{9}{6} = 1,5$$

L'équation est de la forme $y = 1,5x + p$. En utilisant le point $A(-4; 6)$:

$$6 = 1,5 \times (-4) + p \iff 6 = -6 + p \iff p = 12$$

L'équation de (AB) est donc $y = 1,5x + 12$.

Déterminons maintenant l'équation de la tangente à C_g au point d'abscisse $a = 4$.

$$y = g'(4)(x - 4) + g(4)$$

On calcule $g(4) = 6\sqrt{4} + 6 = 6 \times 2 + 6 = 18$.

On calcule $g'(4) = \frac{3}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2} = 1,5$.

En remplaçant, la tangente a pour équation :

$$y = 1,5(x - 4) + 18 \iff y = 1,5x - 6 + 18 \iff \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> $y = 1,5x + 12$$$

Les deux droites ont la même équation, la droite (AB) est donc bien la tangente à C_g au point d'abscisse 4.

3. **Affirmation 3 : Vraie.**

Justification : Étudions la limite du taux d'accroissement de f en 0. Pour tout réel $h \neq 0$:

$$\tau(h) = \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

On sait que $f(0) = 0 \times |0| = 0$ et $f(h) = h|h|$. Donc :

$$\tau(h) = \frac{h|h| - 0}{h} = \frac{h|h|}{h} = |h|$$

On cherche la limite quand h tend vers 0 :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = \lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0$$

Puisque la limite du taux d'accroissement est un nombre réel (ici 0), on conclut que la fonction f est dérivable en 0 et que $\boxed{f'(0) = 0}$.

Exercice 3

1. Une tangente est parallèle à l'axe des abscisses si et seulement si son coefficient directeur (c'est-à-dire le nombre dérivé) est nul. On doit résoudre l'équation $f'(x) = 0$.

$$3x^2 - 10x + 6 = 0$$

C'est une équation du second degré. On calcule le discriminant :

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 3 \times 6 = 100 - 72 = 28$$

Puisque $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-10) - \sqrt{28}}{2 \times 3} = \frac{10 - 2\sqrt{7}}{6} = \frac{2(5 - \sqrt{7})}{6} = \frac{5 - \sqrt{7}}{3}$$

$$x_2 = \frac{-(-10) + \sqrt{28}}{2 \times 3} = \frac{10 + 2\sqrt{7}}{6} = \frac{2(5 + \sqrt{7})}{6} = \frac{5 + \sqrt{7}}{3}$$

Les abscisses cherchées sont $\boxed{\frac{5 - \sqrt{7}}{3} \quad \text{et} \quad \frac{5 + \sqrt{7}}{3}}$.

2. a. L'équation de la tangente T au point d'abscisse 3 est donnée par :

$$y = f'(3)(x - 3) + f(3)$$

Calculons $f(3)$ et $f'(3)$:

$$f(3) = 3^3 - 5 \times 3^2 + 6 \times 3 + 2 = 27 - 45 + 18 + 2 = 2$$

$$f'(3) = 3 \times 3^2 - 10 \times 3 + 6 = 27 - 30 + 6 = 3$$

L'équation devient :

$$y = 3(x - 3) + 2 \iff y = 3x - 9 + 2 \iff \boxed{y = 3x - 7}$$

- b. Développons l'expression de droite :

$$(x + 1)(x^2 - 6x + 9) = x(x^2 - 6x + 9) + 1(x^2 - 6x + 9)$$

$$= x^3 - 6x^2 + 9x + x^2 - 6x + 9$$

$$= \boxed{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}$$

L'égalité est bien démontrée pour tout réel x .

c. Étudier la position relative de C_f et T revient à étudier le signe de la différence $d(x) = f(x) - y_T$.

$$d(x) = (x^3 - 5x^2 + 6x + 2) - (3x - 7)$$

$$d(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 9$$

D'après la question 2.b, on peut factoriser $d(x)$:

$$d(x) = (x + 1)(x^2 - 6x + 9)$$

On reconnaît une identité remarquable : $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$. Ainsi, $d(x) = (x + 1)(x - 3)^2$.

Pour tout réel x , le carré $(x - 3)^2 \geq 0$. Le signe de $d(x)$ dépend donc uniquement du signe de $x + 1$. $x + 1 = 0 \iff x = -1$.

On dresse le tableau de signes :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
Signe de $x + 1$	$-$	0	$+$	$+$
Signe de $(x - 3)^2$	$+$	$+$	0	$+$
Signe de $d(x)$	$-$	0	$+$	$+$
Position	C_f en dessous de T			C_f au-dessus de T

Conclusion :

- Sur $] -\infty ; -1[$, C_f est en dessous de la tangente T .
- Sur $] -1 ; 3[\cup] 3 ; +\infty[$, C_f est au-dessus de la tangente T .
- C_f et T se croisent au point d'abscisse -1 et sont tangentes au point d'abscisse 3 .

Exercice 4

1. Soit u_n le nombre de poissons le mois n . Le mois suivant, la population augmente de 30%, ce qui correspond à un coefficient multiplicateur de $1 + \frac{30}{100} = 1,30$. Ensuite, 15 poissons sont enlevés. On a donc bien la relation de récurrence, pour tout entier n :

$$u_{n+1} = 1,3u_n - 15$$

2. On sait que $u_0 = 80$.

$$u_1 = 1,3 \times u_0 - 15 = 1,3 \times 80 - 15 = 104 - 15 = 89$$

$$u_2 = 1,3 \times u_1 - 15 = 1,3 \times 89 - 15 = 115,7 - 15 = 100,7$$

3. Pour calculer le terme de rang n , il faut répéter l'opération $u = 1.3 * u - 15$ exactement n fois en partant de $u_0 = 80$.

```

1 def terme_u(n):
2     u = 80
3     for i in range(n):
4         u = 1.3 * u - 15
5     return u
6

```

4. Étudions le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = (1,3u_n - 15) - u_n = 0,3u_n - 15$$

Or, on admet que $u_n \geq 75$. En multipliant par 0,3 (qui est strictement positif) :

$$0,3u_n \geq 0,3 \times 75$$

$$0,3u_n \geq 22,5$$

En soustrayant 15 de chaque côté :

$$0,3u_n - 15 \geq 22,5 - 15$$

$$u_{n+1} - u_n \geq 7,5$$

Comme $7,5 > 0$, on a $u_{n+1} - u_n > 0$. La suite (u_n) est donc strictement croissante.

5. L'algorithme `seuil()` doit s'arrêter quand la population dépasse 500. La boucle `while` (tant que) tourne donc *tant que* le nombre de poissons est inférieur ou égal à 500.

```

1 def seuil():
2     u = 80
3     n = 0
4     while u <= 500:
5         u = 1.3 * u - 15
6         n = n + 1
7     return n

```

6. À l'aide de la calculatrice, on détermine les valeurs successives de la suite (u_n) :

$$u_0 = 80$$

$$u_1 = 89$$

$$u_2 = 100,7$$

...

$$u_{10} \approx 463,5$$

$$u_{11} \approx 587,6$$

La première valeur de n pour laquelle $u_n > 500$ est $n = 11$. La fonction renverra donc 11. **Interprétation** : La population de poissons dépassera 500 individus (seuil de menace pour l'écosystème) au bout du 11^e mois.

Exercice 5

1. Graphiquement :

- $f(-1)$ correspond à l'ordonnée du point A de C_f d'abscisse -1 . Par lecture graphique, A a pour coordonnées $(-1; -2)$. Donc $\boxed{f(-1) = -2}$.
- $f'(-1)$ correspond au coefficient directeur de la tangente T au point A . La droite T passe par les points $A(-1; -2)$ et le point $(0; 3)$.

$$m = \frac{y_2 - y_A}{x_2 - x_A} = \frac{3 - (-2)}{0 - (-1)} = \frac{5}{1} = 5$$

Donc $\boxed{f'(-1) = 5}$.

2. **Par le calcul :** On sait que $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ et $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$. D'après la question 1, on a le système suivant :

$$\begin{cases} f(-1) = -2 \\ f'(-1) = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} a(-1)^3 + b(-1)^2 + 1 = -2 \\ 3a(-1)^2 + 2b(-1) = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} -a + b + 1 = -2 \\ 3a - 2b = 5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -a + b = -3 & (L_1) \\ 3a - 2b = 5 & (L_2) \end{cases}$$

De (L_1) , on isole b : $b = a - 3$. On remplace b dans (L_2) :

$$3a - 2(a - 3) = 5 \iff 3a - 2a + 6 = 5 \iff a + 6 = 5 \iff \boxed{a = -1}$$

On en déduit b : $b = -1 - 3 \iff \boxed{b = -4}$. (La fonction est donc $f(x) = -x^3 - 4x^2 + 1$).

3. L'équation de la tangente au point d'abscisse -2 est :

$$y = f'(-2)(x - (-2)) + f(-2)$$

On sait que $f'(-2) = 4$. Calculons $f(-2)$ avec les valeurs de a et b trouvées :

$$f(-2) = -(-2)^3 - 4(-2)^2 + 1 = -(-8) - 4(4) + 1 = 8 - 16 + 1 = -7$$

L'équation de la tangente est donc :

$$y = 4(x + 2) - 7 \iff y = 4x + 8 - 7 \iff y = 4x + 1$$

Pour la tracer, on sait qu'elle passe par le point de tangence $(-2; -7)$ et par le point d'ordonnée à l'origine $(0; 1)$ (voir le tracé vert ci-dessous).

