

Première partie : automatismes – QCM (6 pts)

1. On convertit tous les nombres en écriture décimale pour les comparer :

$$\frac{3}{10} = 0,3 ; \quad 3,2 \times 10^{-2} = 0,032 ; \quad \frac{28}{100} = 0,28 ; \quad 0,31.$$

Le plus petit est 0,032.

La bonne réponse est : $3,2 \times 10^{-2}$

2. On décompose 15 en produit de facteurs premiers : $15 = 3 \times 5$.

$$N = \frac{15^5}{3^3} = \frac{(3 \times 5)^5}{3^3} = \frac{3^5 \times 5^5}{3^3} = 3^2 \times 5^5$$

Or on remarque que : $125 \times 15^2 = 5^3 \times (3 \times 5)^2 = 5^3 \times 3^2 \times 5^2 = 3^2 \times 5^5$.

La bonne réponse est : $N = 125 \times 15^2$

3. On isole la variable u :

$$9v - 5u = 2 \iff -5u = 2 - 9v \iff 5u = 9v - 2 \iff u = \frac{9v - 2}{5}$$

La bonne réponse est : $u = \frac{9v - 2}{5}$

4. La proportion est donnée par $\frac{\text{effectif partiel}}{\text{effectif total}} = \frac{270}{450} = \frac{27}{45} = \frac{3}{5} = 0,6$.

$$0,6 = \frac{60}{100} = 60\%.$$

La bonne réponse est : 60 %

5. Multiplier une quantité par 0,75 revient à la multiplier par le coefficient multiplicateur $CM = 1 - 0,25$. Cela correspond à une diminution de 25 %.

La bonne réponse est : une baisse de 25%

6. Le coefficient multiplicateur global est le produit des coefficients multiplicateurs successifs :

$$CM = \left(1 + \frac{10}{100}\right) \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) = 1,1 \times 0,9 = 0,99.$$

Comme $0,99 < 1$, la population a globalement diminué.

La bonne réponse est : ... a diminué

7. Soit x la prochaine note de l'élève. On veut que la moyenne soit supérieure ou égale à 15 :

$$\frac{15 + 10 + 14 + x}{4} \geq 15 \iff \frac{39 + x}{4} \geq 15 \iff 39 + x \geq 60 \iff x \geq 60 - 39 \iff x \geq 21$$

Il faudrait avoir plus de 21/20, ce qui est impossible.

La bonne réponse est : ça n'est pas possible!

8. On développe l'expression à l'aide de l'identité remarquable $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:

$$2(x - 1)^2 + 1 = 2(x^2 - 2x + 1) + 1 = 2x^2 - 4x + 2 + 1 = 2x^2 - 4x + 3$$

La bonne réponse est : $2x^2 - 4x + 3$

9. L'équation réduite de la droite s'écrit $y = mx + p$.

$$y = \frac{10x + 5}{2} = \frac{10x}{2} + \frac{5}{2} = 5x + \frac{5}{2}$$

Le coefficient directeur est donc 5.

La bonne réponse est : 5

10. La fonction $f(x) = 1 - x$ s'écrit aussi $f(x) = -x + 1$.

Son coefficient directeur est $-1 < 0$, donc la droite est "descendante" (fonction décroissante).

Son ordonnée à l'origine est 1, donc la droite passe par le point de coordonnées $(0; 1)$.

Graphiquement, cela correspond au deuxième graphique.

11. On cherche la racine de la fonction affine :

$$10x - 5 = 0 \iff 10x = 5 \iff x = \frac{5}{10} = 0,5.$$

Le coefficient directeur est 10 (positif), la fonction est donc d'abord négative, s'annule en 0,5, puis est positive.

La bonne réponse est :

x	$-\infty$	0,5	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

12. Résoudre $f(x) < g(x)$ revient à déterminer les abscisses x pour lesquelles la courbe $\mathcal{C}_f$ (en vert) est située **strictement en-dessous** de la courbe $\mathcal{C}_g$ (droite violette).

Graphiquement, on observe que cela se produit entre les abscisses -1 et 1 , puis à partir de l'abscisse 3 .

La bonne réponse est : $] -1; 1[\cup]3; 5]$

Deuxième partie : (14 pts)

Exercice 1

1. a) Puisque le point M appartient au segment $[AB]$, la distance AM est au minimum égale à 0 (si M est confondu avec A) et au maximum égale à la longueur AB , soit 10 (si M est confondu avec B).

Par conséquent : $x \in [0; 10]$.

- b) L'aire du rectangle $AMNP$ est donnée par la formule : $\mathcal{A}(x) = AM \times MN$.

On sait que $AM = x$. Il nous faut exprimer MN en fonction de x . Puisque ABC est un triangle rectangle isocèle en A , on a $AC = AB = 10$. Le quadrilatère $AMNP$ étant un rectangle, les droites (MN) et (AC) sont parallèles (car toutes deux perpendiculaires à (AB)).

On peut donc appliquer le **théorème de Thalès** dans le triangle ABC :

$$M \in [AB], N \in [BC] \text{ et } (MN) \parallel (AC), \text{ donc : } \frac{BM}{BA} = \frac{MN}{AC}$$

Or, $BM = BA - AM = 10 - x$. En remplaçant par les valeurs connues :

$$\frac{10 - x}{10} = \frac{MN}{10}$$

En multipliant par 10 des deux côtés, on obtient : $MN = 10 - x$.

L'aire est donc : $\mathcal{A}(x) = x \times (10 - x) = 10x - x^2$

Ce qui donne bien : $\mathcal{A}(x) = -x^2 + 10x$.

2. a) On étudie le trinôme du second degré $-x^2 + 10x - 9$.

On calcule son discriminant Δ avec $a = -1$, $b = 10$ et $c = -9$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \times (-1) \times (-9) = 100 - 36 = 64.$$

Comme $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 - \sqrt{64}}{2 \times (-1)} = \frac{-10 - 8}{-2} = \frac{-18}{-2} = 9$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 + \sqrt{64}}{2 \times (-1)} = \frac{-10 + 8}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Le coefficient $a = -1$ est négatif, le trinôme est donc du signe contraire de a (positif) à l'intérieur de l'intervalle des racines. On obtient le tableau de signe suivant sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	1	9	$+\infty$	
Signe de $-x^2 + 10x - 9$	-	0	+	0	-

b) L'aire du rectangle $AMNP$ est supérieure ou égale à 9 si et seulement si :

$$\mathcal{A}(x) \geq 9 \iff -x^2 + 10x \geq 9 \iff -x^2 + 10x - 9 \geq 0$$

D'après le tableau de signe établi à la question précédente, le trinôme est positif ou nul sur l'intervalle $[1; 9]$. Comme x doit par ailleurs appartenir à l'intervalle $[0; 10]$ défini à la question 1.a), l'ensemble des solutions est :

$$x \in [1; 9]$$

3. L'aire du triangle ABC est : $\frac{AB \times AC}{2} = \frac{10 \times 10}{2} = 50$.

10 % de cette aire correspond à : $50 \times \frac{10}{100} = 5$.

On cherche les positions du point M telles que l'aire de $AMNP$ vaut 5, ce qui revient à résoudre l'équation :

$$\mathcal{A}(x) = 5 \iff -x^2 + 10x = 5 \iff -x^2 + 10x - 5 = 0$$

Calculons le discriminant de ce nouveau trinôme ($a = -1, b = 10, c = -5$) :

$$\Delta = 10^2 - 4 \times (-1) \times (-5) = 100 - 20 = 80.$$

Puisque $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions. Or $\sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = 4\sqrt{5}$.

$$x_1 = \frac{-10 - 4\sqrt{5}}{-2} = \frac{-2(5 + 2\sqrt{5})}{-2} = 5 + 2\sqrt{5} \quad (\approx 9,47)$$

$$x_2 = \frac{-10 + 4\sqrt{5}}{-2} = \frac{-2(5 - 2\sqrt{5})}{-2} = 5 - 2\sqrt{5} \quad (\approx 0,53)$$

Ces deux valeurs appartiennent bien à l'intervalle $[0; 10]$.

Le point M doit se situer à $5 - 2\sqrt{5}$ ou $5 + 2\sqrt{5}$ unités de A .

4. On met le trinôme $\mathcal{A}(x) = -x^2 + 10x$ sous sa forme canonique $\alpha(x - \beta)^2 + \gamma$:

$$\mathcal{A}(x) = -(x^2 - 10x)$$

On reconnaît le début du développement de $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$. Ainsi, $x^2 - 10x = (x-5)^2 - 25$.

$$\mathcal{A}(x) = -[(x-5)^2 - 25] = \boxed{-(x-5)^2 + 25}$$

Le coefficient devant la parenthèse carrée ($a = -1$) est négatif. La parabole associée est donc "tournée vers le bas" (fonction d'abord croissante, puis décroissante). Son sommet a pour coordonnées $(5; 25)$.

On en déduit le tableau de variations de la fonction $\mathcal{A}$ sur $[0; 10]$:

x	0	5	10
Variations de $\mathcal{A}$	0	25	0

5. D'après le tableau de variations, la fonction $\mathcal{A}$ atteint son maximum pour la valeur $x = 5$, et ce maximum vaut 25.

(Sachant que $AB = 10$, le point M doit être confondu avec le milieu du segment $[AB]$.)

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 \sin(2x)$.

1. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition, l'ensemble de définition $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro. Calculons $f(-x)$:

$$f(-x) = 3 \sin(2 \times (-x)) = 3 \sin(-2x)$$

Or, la fonction sinus est impaire, c'est-à-dire que pour tout réel X , $\sin(-X) = -\sin(X)$. En posant $X = 2x$, on obtient :

$$f(-x) = 3 \times (-\sin(2x)) = -3 \sin(2x) = -f(x)$$

Puisque $f(-x) = -f(x)$, la fonction f est impaire.

- b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculons $f(x + \pi)$:

$$f(x + \pi) = 3 \sin(2(x + \pi)) = 3 \sin(2x + 2\pi)$$

Or, la fonction sinus est périodique de période 2π , ce qui signifie que pour tout réel X , $\sin(X + 2\pi) = \sin(X)$.

Ainsi, en posant $X = 2x$, on a $\sin(2x + 2\pi) = \sin(2x)$.

On obtient donc $f(x + \pi) = 3 \sin(2x) = f(x)$.

Ceci prouve que la fonction f est périodique de période π .

2. a) Calculons les images exactes grâce aux valeurs remarquables du cercle trigonométrique :

- $f(0) = 3 \sin(0) = 3 \times 0 = 0$
- $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 3 \sin\left(2 \times \frac{\pi}{12}\right) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
- $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 3 \sin\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$
- $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \sin\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$
- $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3 \sin\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \times 1 = 3$
- $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 \sin\left(2 \times \frac{\pi}{3}\right) = 3 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$
- $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \sin\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) = 3 \sin(\pi) = 3 \times 0 = 0$

b) En utilisant les valeurs approchées ($\frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2,12$ et $\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2,60$), on complète le tableau :

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	0	1,5	2,1	2,6	3	2,6	0

3. Sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$: La fonction f étant impaire, sa courbe représentative admet **l'origine du repère O comme centre de symétrie**. Pour tracer la courbe sur $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, il suffit donc de construire le symétrique, par rapport à l'origine du repère, du motif que l'on vient d'obtenir sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$: La fonction f étant périodique de période π , le motif dessiné sur un intervalle d'amplitude π (comme l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ qui vient d'être tracé dans sa totalité) se répète à l'identique. On obtient la suite de la courbe sur $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ en **translatant** le motif de la courbe présente sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ par une translation de vecteur $\pi\vec{i}$ (vers la droite).

4. Représentation graphique de $f(x) = 3 \sin(2x)$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$:

