

PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES - QCM

Remarque : L'énoncé ne demandait pas de justification pour le QCM, mais elles sont fournies ici à titre de correction détaillée.

Question 1 : Réponse c.

On cherche les racines du trinôme $2x^2 + 6x - 8$.

Le discriminant est $\Delta = 6^2 - 4 \times 2 \times (-8) = 36 + 64 = 100$.

Comme $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines : $x_1 = \frac{-6 - 10}{4} = -4$ et $x_2 = \frac{-6 + 10}{4} = 1$.

La forme factorisée est $a(x - x_1)(x - x_2) = 2(x + 4)(x - 1)$.

Question 2 : Réponse d.

Soit N le nombre total d'élèves. On sait que 4 % de N correspond à 50 élèves, soit :

$$\frac{4}{100} \times N = 50 \iff N = \frac{50 \times 100}{4} = \frac{5000}{4} = 1250.$$

Question 3 : Réponse c.

Exprimons tous les nombres sous forme décimale : $A = \frac{1}{5} = 0,20$; $B = \frac{19}{100} = 0,19$; $C = 0,21$.

On a donc $0,19 < 0,20 < 0,21$, ce qui donne $B < A < C$.

Question 4 : Réponse c.

Calculons chaque valeur :

$$A = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25} = 0,04 ; \quad B = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} = 0,03125 ; \quad C = 0,05 ; \quad D = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} \approx 0,037.$$

Le plus grand de ces nombres est 0,05, soit C .

Question 5 : Réponse c.

$$A = 10 + 0,1 + \frac{1}{1000} = 10 + 0,1 + 0,001 = 10,101.$$

Question 6 : Réponse b.

La multiplication est prioritaire :

$$A = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{4}{6} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{3}{6} - \frac{4}{6} = -\frac{1}{6}.$$

Question 7 : Réponse c.

En utilisant l'identité remarquable $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$: $x - (2x - 3)^2 = x - (4x^2 - 12x + 9) = x - 4x^2 + 12x - 9 = -4x^2 + 13x - 9$.

Question 8 : Réponse d.

$$3x = 4x^2 \iff 4x^2 - 3x = 0 \iff x(4x - 3) = 0.$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul :

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad 4x - 3 = 0 \iff x = \frac{3}{4}. \text{ D'où } S = \left\{0; \frac{3}{4}\right\}.$$

Question 9 : Réponse b.

Diminuer une quantité de 2,3 % revient à la multiplier par le coefficient multiplicateur $CM = 1 - \frac{2,3}{100} = 1 - 0,023 = \boxed{0,977}$.

Question 10 : Réponse d.

Une augmentation de 20 % correspond à un coefficient multiplicateur de $1 + \frac{20}{100} = 1,20$.

Pour deux augmentations successives, on multiplie les coefficients : $P \times 1,20 \times 1,20 = \boxed{P \times 1,44}$.

Question 11 : Réponse c.

On met au même dénominateur le membre de gauche :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \iff \frac{y}{xy} + \frac{x}{xy} = \frac{1}{z} \iff \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{z}.$$

En inversant les deux fractions, on obtient $\boxed{z = \frac{xy}{x+y}}$.

Question 12 : Réponse b.

Le nombre dérivé $f'(0)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 (le point A).

Graphiquement, la tangente passe par $A(0; 2)$ et par le point de coordonnées $(2; 0)$.

Son coefficient directeur est donc $m = \frac{y_2 - y_A}{x_2 - x_A} = \frac{0 - 2}{2 - 0} = \frac{-2}{2} = \boxed{-1}$.

DEUXIÈME PARTIE

Exercice 1 (5 points)

1. L'année 2020 correspond au rang $n = 0$. On a donc comptabilisé $\boxed{u_0 = 200\,000}$.

2. Diminuer de 10 % revient à multiplier par $1 - 0,10 = 0,9$.

Le nombre d'entrées en 2021 est donc : $200\,000 \times 0,9 = \boxed{180\,000}$.

3. Pour tout entier naturel n , le nombre d'entrées de l'année suivante $(n+1)$ subit une baisse de 10 % par rapport à l'année n . Ainsi, $u_{n+1} = u_n \times (1 - \frac{10}{100}) = 0,9u_n$.

On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite géométrique** de premier terme $\boxed{u_0 = 200\,000}$ et de raison $\boxed{q = 0,9}$.

4. Pour une suite géométrique, la formule explicite est $u_n = u_0 \times q^n$.

Ici, pour tout entier naturel n : $\boxed{u_n = 200\,000 \times 0,9^n}$.

5. L'année 2025 correspond à $n = 5$ (car $2025 = 2020 + 5$).

On calcule $u_5 = 200\,000 \times 0,9^5$.

D'après l'aide au calcul fournie, $0,9^5 = 0,59049$.

Donc $u_5 = 200\,000 \times 0,59049 = \boxed{118\,098}$.

Le cinéma a comptabilisé 118 098 entrées en 2025.

6. On cherche à calculer le nombre total d'entrées cumulées entre 2020 (inclus) et 2030 (inclus), ce qui correspond à la somme des termes de u_0 à u_{10} (soit 11 termes).

$$S = u_0 \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q} = 200\,000 \times \frac{1 - 0,9^{11}}{1 - 0,9}$$

$$S = 200\,000 \times \frac{1 - 0,9^{11}}{0,1} = 2\,000\,000 \times (1 - 0,9^{11})$$

D'après l'aide au calcul, $0,9^{11} \approx 0,3138$.

$$S \approx 2\,000\,000 \times (1 - 0,3138) = 2\,000\,000 \times 0,6862 = \boxed{1\,372\,400}$$

Le directeur a comptabilisé environ 1 372 400 entrées entre 2020 et 2030.

7. **a.** Le programme Python doit s'exécuter tant que le nombre d'entrées U est strictement supérieur à 100 000. À chaque passage dans la boucle, U doit être multiplié par 0,9 (la raison).

```
def cinema() :
    N = 0
    U = 200000
    while U > 100000 :
        N = N + 1
        U = U * 0.9
    return N
```

- b.** Le programme renvoie la valeur **7**. En effet, grâce à "l'aide au calcul", on observe que $0,9^6 \approx 0,5314$ et $0,9^7 \approx 0,4783$.

En multipliant ces résultats par 200 000, on obtient : $u_6 \approx 106\,288$ et $u_7 \approx 95\,659$.

C'est au cours de l'année $2020 + 7 = \mathbf{2027}$ que le nombre d'entrées passera sous la barre des 100 000 pour la première fois.

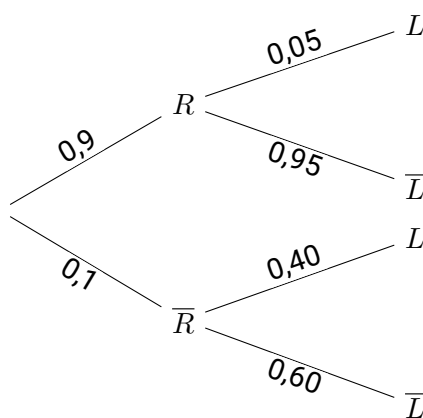
Exercice 2 (4 points)

On note $\bar{R}$ l'évènement contraire de R : « Le participant n'a pas choisi la randonnée », ce qui correspond à « Le participant a choisi le cross ».

1. **a.** Parmi ceux qui ont choisi la randonnée, 5 % sont licenciés. Donc $P_R(L) = \frac{5}{100} = \boxed{0,05}$.

b. Parmi ceux qui ont choisi le cross, 40 % sont licenciés. Donc $P_{\bar{R}}(L) = \frac{40}{100} = \boxed{0,40}$.

2. Représentation par un arbre pondéré :



3. **a.** $P(R \cap L) = P(R) \times P_R(L) = 0,9 \times 0,05 = \boxed{0,045}$. *Interprétation* : La probabilité que le participant interrogé ait choisi la randonnée **et** soit licencié dans un club est de 0,045 (soit 4,5 %).

b. Les événements R et $\bar{R}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(L) = P(R \cap L) + P(\bar{R} \cap L)$$

On sait que $P(\bar{R} \cap L) = P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(L) = 0,1 \times 0,40 = 0,04$.

Ainsi, $P(L) = 0,045 + 0,04 = \boxed{0,085}$.

4. On cherche la probabilité que le participant ait choisi le cross sachant qu'il est licencié, soit $P_L(\bar{R})$:

$$P_L(\bar{R}) = \frac{P(\bar{R} \cap L)}{P(L)} = \frac{0,040}{0,085} \approx \boxed{0,47}$$

La probabilité est d'environ 47 %. Comme 47 % n'est pas "largement supérieure à 50 %" (elle est même inférieure), **l'intuition du journaliste n'est pas correcte.**

5. Deux événements R et L sont indépendants si et seulement si $P(R \cap L) = P(R) \times P(L)$.

Or, $P(R) \times P(L) = 0,9 \times 0,085 = 0,0765$.

Comme $P(R \cap L) = 0,045$, on a $P(R \cap L) \neq P(R) \times P(L)$.

Les événements R et L ne sont pas indépendants.

(Remarque : on pouvait aussi comparer $P_R(L) = 0,05$ et $P(L) = 0,085$. Puisqu'elles sont différentes, il n'y a pas indépendance.)

Exercice 3 (5 points)

1. f est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3 \times (3x^2) - 5 \times (2x) + 0 = \boxed{9x^2 - 10x}$.

2. Pour étudier le sens de variation de f , on étudie le signe de sa dérivée $f'(x)$.

$$f'(x) = x(9x - 10).$$

Les racines de ce trinôme sont $x_1 = 0$ et $x_2 = \frac{10}{9}$.

Comme le coefficient $a = 9$ est strictement positif, $f'(x)$ est du signe de a (positif) à l'extérieur des racines et négatif entre les racines.

On calcule les valeurs aux extremums locaux :

$$f(0) = 3(0)^3 - 5(0)^2 + 2 = 2.$$

$$f\left(\frac{10}{9}\right) = 3\left(\frac{10}{9}\right)^3 - 5\left(\frac{10}{9}\right)^2 + 2 = \frac{3000}{729} - \frac{500}{81} + 2 = \frac{1000}{243} - \frac{1500}{243} + \frac{486}{243} = -\frac{14}{243} \approx -0,06.$$

x	$-\infty$	0	$\frac{10}{9}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	+
$f(x)$	$-\infty$	2	$-\frac{14}{243}$	$+\infty$

3. L'équation réduite de la tangente T en $a = -1$ est donnée par la formule :

$$y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1).$$

Calculons $f(-1)$ et $f'(-1)$: $f(-1) = 3(-1)^3 - 5(-1)^2 + 2 = -3 - 5 + 2 = -6$. $f'(-1) = 9(-1)^2 - 10(-1) = 9 + 10 = 19$.

Ainsi, $T : y = 19(x + 1) - 6 \iff y = 19x + 19 - 6 \iff \boxed{y = 19x + 13}$.

4. a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) - g(x) = (3x^3 - 5x^2 + 2) - (3x^3 - 4x + 1)$$

$$f(x) - g(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2 - 3x^3 + 4x - 1 = \boxed{-5x^2 + 4x + 1}$$

b. Pour étudier le signe de $f(x) - g(x)$, on étudie le signe du trinôme $-5x^2 + 4x + 1$.

$$\text{Calcul du discriminant : } \Delta = 4^2 - 4 \times (-5) \times 1 = 16 + 20 = 36.$$

$\Delta > 0$, il y a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{36}}{2 \times (-5)} = \frac{-4 - 6}{-10} = \frac{-10}{-10} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4 + 6}{-10} = \frac{2}{-10} = -\frac{1}{5}.$$

Le coefficient $a = -5$ est négatif, le trinôme est donc positif "à l'intérieur" des racines, sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{5}; 1\right]$, et négatif à l'extérieur.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{5}$	1	$+\infty$	
Signe de $f(x) - g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

c. La position relative de C_f et C_g est donnée par le signe de la différence $f(x) - g(x)$:

- Sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{5}; 1\right]$, $f(x) - g(x) > 0$, donc $f(x) > g(x)$.

La courbe C_f est strictement au-dessus de C_g .

- Sur les intervalles $\left]-\infty; -\frac{1}{5}\right]$ et $\left]1; +\infty\right[$, $f(x) - g(x) < 0$, donc $f(x) < g(x)$.

La courbe C_f est strictement en dessous de C_g .