

Exercice 1

6 points

Test d'automatismes

1. Réponse c.

On résout $2x^2 - 8 \leq 0 \iff 2(x^2 - 4) \leq 0 \iff x^2 \leq 4$.

Les racines du trinôme sont -2 et 2 . Le coefficient dominant $a = 2$ est positif, donc le trinôme est négatif *entre* les racines.

$$S = [-2; 2]$$

2. Réponse c.

Applications : 40% de $60 = 0,4 \times 60 = 24$ Go.

Espace occupé total : 6 (OS) + 24 (App) = 30 Go.

Espace restant : $60 - 30 = \boxed{30 \text{ Go}}$.

3. Réponse b.

$(x - 1)^2 = 0,01 \iff x - 1 = \sqrt{0,01}$ ou $x - 1 = -\sqrt{0,01}$.

Soit $x - 1 = 0,1 \iff x = 1,1$ (rejeté car $x < 1$).

Soit $x - 1 = -0,1 \iff x = 0,9$ (accepté).

4. Réponse b.

On calcule l'image de -2 : $f(-2) = -2 \times (-2)^3 + 1 = -2 \times (-8) + 1 = 16 + 1 = \boxed{17}$.

5. Réponse a.

$$\left(\frac{3}{7}\right)^3 \times \left(\frac{14}{9}\right)^2 = \frac{3^3}{7^3} \times \frac{(2 \times 7)^2}{(3^2)^2} = \frac{3^3}{7^3} \times \frac{2^2 \times 7^2}{3^4} = \frac{1}{7} \times \frac{4}{3} = \boxed{\frac{4}{21}}$$

6. Réponse c.

Pour $h(x) = x^2 - 4x + 5$, le discriminant est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4$.

$\Delta < 0$, donc le trinôme ne s'annule jamais et garde le signe de $a = 1$ (positif) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

6 points

1. FAUX.

La fonction u est définie par $u(x) = x^2 + 1$. Sa dérivée est $u'(x) = 2x$.

L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse $a = 1$ est donnée par :

$$y = u'(1)(x - 1) + u(1)$$

Or, $u(1) = 1^2 + 1 = 2$ et $u'(1) = 2 \times 1 = 2$.

L'équation devient : $y = 2(x - 1) + 2 \iff y = 2x - 2 + 2 \iff \boxed{y = 2x}$.

L'affirmation proposait $y = 2x + 2$, ce qui est incorrect.

2. VRAI.

La fonction racine carrée $v(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, donc dérivable en 4.

Pour tout $x > 0$, $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$\text{Ainsi, } v'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2 \times 2} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

3. FAUX.

Étudions la dérivabilité de w en -2 par le taux d'accroissement :

$$\frac{w(-2+h) - w(-2)}{h} = \frac{\sqrt{(-2+h)+2} - \sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \quad (\text{pour } h > 0)$$

Lorsque $h \rightarrow 0^+$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$.

La limite n'est pas finie, donc w n'est pas dérivable en -2 (la courbe admet une tangente verticale).

Exercice 3

6 points

1. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ est une fonction rationnelle définie et dérivable sur son domaine de définition $]0; +\infty[$.

Pour tout $a > 0$, en utilisant la formule $(x^n)' = nx^{n-1}$ avec $n = -2$:

$$f'(a) = -2 \times a^{-2-1} = -2a^{-3} = \boxed{-\frac{2}{a^3}}$$

Autre méthode : En posant $u(x) = x^2$, on a $f = \frac{1}{u}$, donc $f' = -\frac{u'}{u^2}$.

$$f'(a) = -\frac{2a}{(a^2)^2} = -\frac{2a}{a^4} = -\frac{2}{a^3}$$

2. C_f admet une tangente horizontale si et seulement si le nombre dérivé est nul.

$$f'(x) = 0 \iff -\frac{2}{x^3} = 0$$

Une fraction est nulle si son numérateur est nul, soit $-2 = 0$, ce qui est impossible.

Conclusion : C_f n'admet aucune tangente horizontale.

3. Développons l'expression de droite :

$$(x-1)(x^2+x+1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1$$

En simplifiant les termes, il reste :

$$(x-1)(x^2+x+1) = x^3 - 1$$

L'égalité est vérifiée pour tout réel x .

4. Le coefficient directeur de la droite (d) d'équation $y = -2x + 1$ est $m = -2$.

On cherche s'il existe des points où la tangente a le même coefficient directeur, c'est-à-dire $f'(x) = -2$.

$$\begin{aligned} -\frac{2}{x^3} &= -2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} &= 1 \quad (\text{en divisant par } -2) \\ \Leftrightarrow x^3 &= 1 \\ \Leftrightarrow x^3 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

D'après la question 3, $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$. Or pour tout x , $x^2 + x + 1 \neq 0$ (car $\Delta = -3 < 0$). La seule solution réelle est donc $x = 1$.

Conclusion : C_f admet une unique tangente parallèle à (d) au point d'abscisse 1.

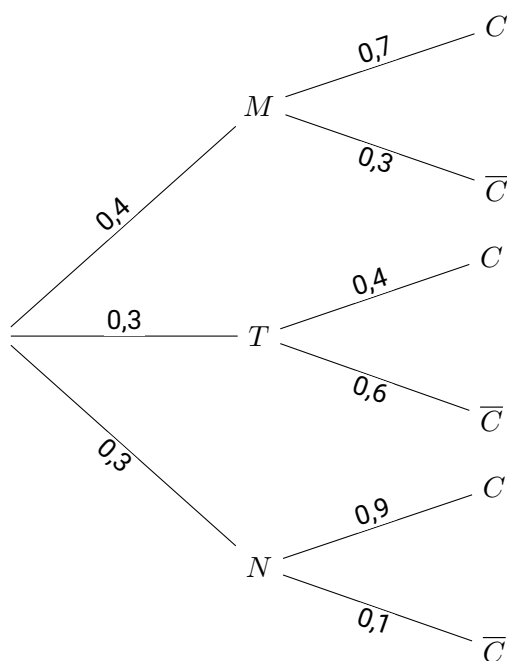
Exercice 4

8 points

1. Arbre de probabilités

Données de l'énoncé :

- $P(M) = 0,4$ et $P_M(C) = 0,7$.
- $P(T) = 0,3$ et $P_T(C) = 0,4$.
- Les clients restants ne prennent pas de dessert : $P(N) = 1 - (0,4 + 0,3) = 0,3$. Et $P_N(C) = 0,9$.



2. • $P(T \cap C)$ est la probabilité que le client prenne une part de tarte **ET** un café.
• $P_M(C)$ est la probabilité que le client prenne un café **SACHANT QU'**il a pris un assortiment de macarons.

3. Calcul de $P(T \cap C)$:

$$P(T \cap C) = P(T) \times P_T(C) = 0,3 \times 0,4 = \boxed{0,12}$$

Calcul de $P(C)$: Les événements M, T et N forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(M \cap C) + P(T \cap C) + P(N \cap C) \\ &= P(M) \times P_M(C) + 0,12 + P(N) \times P_N(C) \\ &= 0,4 \times 0,7 + 0,12 + 0,3 \times 0,9 \\ &= 0,28 + 0,12 + 0,27 \\ &= \boxed{0,67} \end{aligned}$$

4. Calcul de $P(T \cup C)$:

$$P(T \cup C) = P(T) + P(C) - P(T \cap C)$$

$$P(T \cup C) = 0,3 + 0,67 - 0,12 = \boxed{0,85}$$

Interprétation : C'est la probabilité que le client prenne une part de tarte **OU** un café (ou les deux).

5. On cherche la probabilité qu'il ait commandé une tarte sachant qu'il a pris un café, c'est-à-dire $P_C(T)$.

$$P_C(T) = \frac{P(T \cap C)}{P(C)} = \frac{0,12}{0,67} = \frac{12}{67}$$

La fraction $\frac{12}{67}$ est irréductible (67 est un nombre premier).

$$\boxed{P_C(T) = \frac{12}{67}}$$

Exercice 5

4 points

1. La sensibilité est la capacité à détecter la maladie (T) **lorsqu'elle est présente** (M). En termes de probabilité conditionnelle, c'est : $\boxed{P_M(T)}$.
2. La VPP est la probabilité que la maladie soit présente (M) **lorsque le test est positif** (T). En termes de probabilité conditionnelle, c'est : $\boxed{P_T(M)}$.

3. Complétion du tableau :

- Total de la population : 10 000.
- 4 % de malades : $0,04 \times 10\,000 = 400$ malades (Total colonne 1).
- Non malades : $10\,000 - 400 = 9\,600$ (Total colonne 2).
- Malades avec Test - : $400 - 340 = 60$.
- Non malades avec Test + : Total Test + (500) - Malades Test + (340) = 160.
- Non malades avec Test - : $9\,600 - 160 = 9\,440$.

	Malades (M)	Non malades ($\bar{M}$)	Total
Test + (T)	340	160	500
Test - ($\bar{T}$)	60	9 440	9 500
Total	400	9 600	10 000

4. Calcul de la VPP ($P_T(M)$) :

$$P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{\text{Nombre de Malades et Positifs}}{\text{Nombre total de Positifs}} = \frac{340}{500} = \frac{34}{50} = \boxed{0,68}$$

La valeur prédictive positive est de 68 %.

Calcul de la sensibilité ($P_M(T)$) :

$$P_M(T) = \frac{P(M \cap T)}{P(M)} = \frac{\text{Nombre de Malades et Positifs}}{\text{Nombre total de Malades}} = \frac{340}{400} = \frac{34}{40} = \frac{85}{100} = \boxed{0,85}$$

La sensibilité du test est de 85 %.