

Correction Exercice 1

(QCM Parabole)

Analyse graphique préliminaire : La parabole est tournée vers le bas (« triste »), donc le coefficient a est négatif. Le sommet semble avoir pour coordonnées $(-1; 2)$. La courbe coupe l'axe des ordonnées au point $(0; 1)$, donc $c = 1$. La forme canonique serait $P(x) = a(x+1)^2 + 2$. En utilisant le point $(0; 1)$: $a(0+1)^2 + 2 = 1 \iff a + 2 = 1 \iff a = -1$. Donc $P(x) = -(x+1)^2 + 2 = -(x^2 + 2x + 1) + 2 = -x^2 - 2x + 1$.

1. Réponse (b) : négatif.

La parabole est orientée vers le bas (concavité tournée vers les y négatifs).

2. Réponse (a) : strictement positif.

La courbe coupe l'axe des abscisses en deux points distincts, l'équation $P(x) = 0$ admet donc deux solutions réelles distinctes, ce qui signifie que le discriminant $\Delta > 0$.

3. Réponse (a) : égale à 1.

La valeur de c correspond à l'ordonnée à l'origine (image de 0). Graphiquement, la courbe passe par le point $J(0; 1)$, donc $c = 1$.

4. Réponse (b) : égale à -2.

La valeur $a + b + c$ correspond à $P(1)$ (en remplaçant x par 1). Graphiquement, pour $x = 1$, l'ordonnée se lit à -2. *Vérification par calcul* : $P(1) = -1(1)^2 - 2(1) + 1 = -1 - 2 + 1 = -2$.

Correction Exercice 2

(Trigonométrie)

1. Conversion en radians

On utilise la proportionnalité entre degrés et radians (180° correspond à π radians).

$$\alpha = 144 \times \frac{\pi}{180} = \frac{12 \times 12}{12 \times 15} \pi = \frac{12}{15} \pi = \boxed{\frac{4\pi}{5}}$$

2. Calculs exacts

(a) On remarque que $\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$. Or, pour tout réel x , $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$.

$$\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \boxed{-\frac{1 + \sqrt{5}}{4}}$$

(b) Pour tout réel x , $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2$$

Développons le carré : $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{16} = \frac{6+2\sqrt{5}}{16} = \frac{3+\sqrt{5}}{8}.$

D'où :

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{8}{8} - \frac{3+\sqrt{5}}{8} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$$

Comme $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$, le sinus est positif.

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} = \boxed{\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}} \quad (\text{ou forme équivalente})$$

3. Résolution d'équation trigonométrique On cherche $x \in]-\pi; \pi]$ tel que $\cos(3x) = -\frac{1}{2}$. On sait que $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

$$\cos(3x) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \iff \begin{cases} 3x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

En divisant par 3 :

$$\iff \begin{cases} x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

On cherche les solutions dans $]-\pi; \pi]$. Le pas est de $\frac{2\pi}{3} = \frac{6\pi}{9}$.

• Pour la première famille $\left(\frac{2\pi}{9}\right)$:

- $k = 0 \implies x = \frac{2\pi}{9}$
- $k = 1 \implies x = \frac{2\pi}{9} + \frac{6\pi}{9} = \frac{8\pi}{9}$
- $k = -1 \implies x = \frac{2\pi}{9} - \frac{6\pi}{9} = -\frac{4\pi}{9}$
- $k = -2 \implies x = \frac{2\pi}{9} - \frac{12\pi}{9} = -\frac{10\pi}{9}$ (hors intervalle, car $< -\pi$)

• Pour la seconde famille $\left(-\frac{2\pi}{9}\right)$:

- $k = 0 \implies x = -\frac{2\pi}{9}$
- $k = 1 \implies x = -\frac{2\pi}{9} + \frac{6\pi}{9} = \frac{4\pi}{9}$
- $k = -1 \implies x = -\frac{2\pi}{9} - \frac{6\pi}{9} = -\frac{8\pi}{9}$

Conclusion : L'ensemble des solutions est :

$$S = \left\{ -\frac{8\pi}{9}; -\frac{4\pi}{9}; -\frac{2\pi}{9}; \frac{2\pi}{9}; \frac{4\pi}{9}; \frac{8\pi}{9} \right\}$$

Correction Exercice 3

(Étude de fonction trigo)

Soit $f(x) = 3 \cos(5x) - \sin^2(5x)$.

1. Périodicité

Pour tout réel x , calculons $f\left(x + \frac{2\pi}{5}\right)$:

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{2\pi}{5}\right) &= 3 \cos\left(5\left(x + \frac{2\pi}{5}\right)\right) - \sin^2\left(5\left(x + \frac{2\pi}{5}\right)\right) \\ &= 3 \cos(5x + 2\pi) - \sin^2(5x + 2\pi) \end{aligned}$$

Les fonctions cosinus et sinus étant 2π -périodiques, $\cos(X + 2\pi) = \cos(X)$ et $\sin(X + 2\pi) = \sin(X)$.

$$= 3 \cos(5x) - \sin^2(5x) = f(x)$$

Donc f est bien périodique de période $\frac{2\pi}{5}$.

2. Parité

L'ensemble de définition $\mathbb{R}$ est centré en 0. Calculons $f(-x)$:

$$f(-x) = 3 \cos(5(-x)) - \sin^2(5(-x)) = 3 \cos(-5x) - (\sin(-5x))^2$$

Or la fonction cosinus est paire ($\cos(-X) = \cos(X)$) et la fonction sinus est impaire ($\sin(-X) = -\sin(X)$).

$$f(-x) = 3 \cos(5x) - (-\sin(5x))^2 = 3 \cos(5x) - \sin^2(5x) = f(x)$$

Puisque $f(-x) = f(x)$, la fonction f est paire.

3. Équation $f(x) = -3$

On remplace $\sin^2(5x)$ par $1 - \cos^2(5x)$:

$$3 \cos(5x) - (1 - \cos^2(5x)) = -3 \iff \cos^2(5x) + 3 \cos(5x) - 1 = -3$$

$$\iff \cos^2(5x) + 3 \cos(5x) + 2 = 0$$

Posons $X = \cos(5x)$. L'équation devient $X^2 + 3X + 2 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$. Les solutions pour X sont $X_1 = \frac{-3-1}{2} = -2$ et $X_2 = \frac{-3+1}{2} = -1$.

On revient à la variable x :

- $\cos(5x) = -2$: impossible car un cosinus est compris entre -1 et 1 .
- $\cos(5x) = -1$: possible.

$\cos(5x) = -1 \iff 5x = \pi + 2k\pi \iff x = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}$. Une solution particulière (pour $k = 0$) est

$$\boxed{x = \frac{\pi}{5}}$$

4. Équation $f(x) = -5$

En reprenant la transformation précédente, l'équation revient à :

$$\cos^2(5x) + 3 \cos(5x) - 1 = -5 \iff \cos^2(5x) + 3 \cos(5x) + 4 = 0$$

Posons $X = \cos(5x)$. On doit résoudre $X^2 + 3X + 4 = 0$. Discriminant : $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 - 16 = -7$. $\Delta < 0$, l'équation en X n'a pas de solution réelle. Par conséquent, **l'équation $f(x) = -5$ n'admet aucune solution.**

Correction Exercice 4

(Optimisation géométrique)

1. Valeurs possibles pour x

Le point M appartient au segment $[AB]$ de longueur 5, donc $0 \leq x \leq 5$. Le point N appartient au segment $[BC]$ de longueur 3, et $BN = x$, donc $0 \leq x \leq 3$. Pour que la configuration existe telle que décrite, x doit vérifier les deux conditions.

$$x \in [0; 3]$$

2. Expression des longueurs

Puisque $AB = 5$ et $AM = x$, alors $BM = AB - AM = 5 - x$.

Puisque $BC = 3$ et $BN = x$, alors $CN = BC - BN = 3 - x$.

De même par symétrie de la construction : $DP = AB - DQ - (CP \text{ projection}) \dots$ En fait, P est sur $[CD]$ donc $CP = x \implies DP = CD - CP = 5 - x$. Q est sur $[DA]$ donc $DQ = x \implies AQ = AD - DQ = 3 - x$. **Note : L'énoncé implique $DQ = x$, et $AD = BC = 3$.**

3. Aire du quadrilatère $MNPQ$

L'aire du rectangle $ABCD$ est $\mathcal{A}_{ABCD} = 5 \times 3 = 15$. Calculons la somme des aires des 4 triangles rectangles aux coins :

$$\begin{aligned} \bullet \mathcal{A}_{AMQ} &= \frac{AM \times AQ}{2} = \frac{x(3-x)}{2} \\ \bullet \mathcal{A}_{CPN} &= \frac{CP \times CN}{2} = \frac{x(3-x)}{2} \text{ (identique car } CP = x, CN = 3-x) \\ \bullet \mathcal{A}_{BNM} &= \frac{BN \times BM}{2} = \frac{x(5-x)}{2} \\ \bullet \mathcal{A}_{DQP} &= \frac{DQ \times DP}{2} = \frac{x(5-x)}{2} \text{ (identique)} \end{aligned}$$

Somme des aires des triangles :

$$S = 2 \times \frac{x(3-x)}{2} + 2 \times \frac{x(5-x)}{2} = x(3-x) + x(5-x)$$

$$S = 3x - x^2 + 5x - x^2 = -2x^2 + 8x$$

L'aire de $MNPQ$ s'obtient par soustraction :

$$A(x) = \mathcal{A}_{ABCD} - S = 15 - (-2x^2 + 8x) = 2x^2 - 8x + 15$$

4. Minimum de l'aire

La fonction A est une fonction polynôme du second degré avec $a = 2 > 0$. Elle admet un minimum en son sommet. Abscisse du sommet : $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2 \times 2} = \frac{8}{4} = 2$. Cette valeur $x = 2$ appartient bien à l'intervalle de définition $[0 ; 3]$.

Valeur du minimum : $A(2) = 2(2)^2 - 8(2) + 15 = 8 - 16 + 15 = 7$.

Conclusion : L'aire est minimale pour $x = 2$ (cm) et cette aire vaut 7 cm^2 .

5. Aire égale à 11 cm^2

On résout l'équation $A(x) = 11$ sur $[0 ; 3]$:

$$2x^2 - 8x + 15 = 11 \iff 2x^2 - 8x + 4 = 0$$

En divisant par 2 : $x^2 - 4x + 2 = 0$. Discriminant : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 16 - 8 = 8$. $\Delta > 0$, deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{8}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{4 + \sqrt{8}}{2} = 2 + \sqrt{2}$$

Vérification de l'appartenance à $[0 ; 3]$:

- $x_1 \approx 2 - 1,4 = 0,6$. C'est dans l'intervalle.
- $x_2 \approx 2 + 1,4 = 3,4$. Ce n'est pas dans l'intervalle $[0 ; 3]$.

Conclusion : Il existe une unique position pour laquelle l'aire vaut 11 cm^2 , donnée par $x = 2 - \sqrt{2}$.

Correction Exercice 5

(Dérivation)

Soit $f(x) = \frac{1}{x+2}$ définie sur $] -2 ; 3]$.

1. Nombre dérivé avec le taux d'accroissement

Soit $a = -\frac{3}{2} = -1,5$ et h un réel non nul tel que $a + h > -2$. Le taux d'accroissement de f entre a et $a + h$ est :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Calculons $f(a) = f(-1,5) = \frac{1}{-1,5+2} = \frac{1}{0,5} = 2$.

$$f(a+h) = \frac{1}{-1,5+h+2} = \frac{1}{h+0,5}$$

D'où :

$$\tau(h) = \frac{\frac{1}{h+0,5} - 2}{h} = \frac{\frac{1 - 2(h+0,5)}{h+0,5}}{h} = \frac{1 - 2h - 1}{h(h+0,5)} = \frac{-2h}{h(h+0,5)}$$

Pour $h \neq 0$, on simplifie par h :

$$\tau(h) = \frac{-2}{h + 0,5}$$

Passage à la limite : $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = \frac{-2}{0 + 0,5} = -4$. La limite étant finie, f est dérivable en $-\frac{3}{2}$ et

$$f' \left(-\frac{3}{2} \right) = -4.$$

2. Vérification avec la formule

On admet que $f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$. Calculons l'image de $a = -\frac{3}{2}$ par cette fonction dérivée :

$$f' \left(-\frac{3}{2} \right) = -\frac{1}{(-1,5 + 2)^2} = -\frac{1}{(0,5)^2} = -\frac{1}{0,25} = -4$$

On retrouve exactement le même résultat.

3. Interprétation graphique

Le nombre dérivé $f'(a)$ correspond au coefficient directeur de la tangente (T_2) à la courbe au point A d'abscisse $a = -1,5$.

Sur le graphique fourni :

- La tangente passe par le point de tangence $A(-1,5 ; 2)$.
- Pour lire graphiquement la pente, on part de A , on avance de 0,5 vers la droite (jusqu'à $x = -1$), et on observe le déplacement vertical pour rejoindre la droite.
- L'équation de la tangente est $y = f'(a)(x - a) + f(a) = -4(x + 1,5) + 2 = -4x - 6 + 2 = -4x - 4$.
- Si on prend $x = -1$ (avancée de 0,5), $y = -4(-1) - 4 = 0$. Le point $(-1 ; 0)$ semble bien être sur la droite rouge.
- Le déplacement vertical est $\Delta y = 0 - 2 = -2$ pour un déplacement horizontal $\Delta x = 0,5$.
- Pente = $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{0,5} = -4$.

Conclusion : La lecture graphique du coefficient directeur de la tangente confirme la valeur -4 trouvée par le calcul.