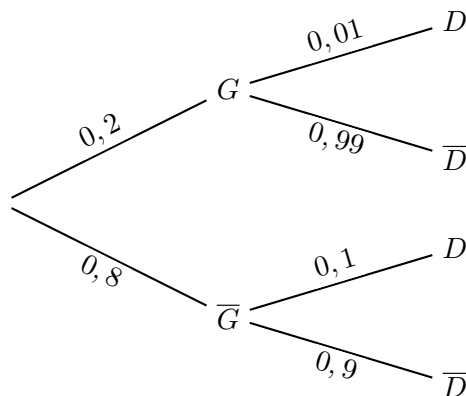


Exercice 1 : Probabilités

1. **Arbre pondéré** : D'après l'énoncé, on a :



2. **Probabilité de l'événement A ("Sous garantie et défectueuse")** : On cherche $P(G \cap D)$. D'après l'arbre :

$$P(A) = P(G \cap D) = P(G) \times P_G(D) = 0,2 \times 0,01 = \boxed{0,002}$$

3. **Calcul de $P(D)$** : Les événements G et $\bar{G}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(D) &= P(G \cap D) + P(\bar{G} \cap D) \\ &= 0,002 + P(\bar{G}) \times P_{\bar{G}}(D) \\ &= 0,002 + 0,8 \times 0,1 \\ &= 0,002 + 0,08 = \boxed{0,082} \end{aligned}$$

4. **Probabilité conditionnelle $P_D(G)$** : On cherche la probabilité que la chaudière soit sous garantie sachant qu'elle est défectueuse :

$$P_D(G) = \frac{P(G \cap D)}{P(D)} = \frac{0,002}{0,082} = \frac{2}{82} = \boxed{\frac{1}{41}}$$

On retrouve bien le résultat annoncé.

5. **Variable aléatoire Y (Coût)** :

(a) **Loi de probabilité de Y** : Les valeurs possibles pour Y sont 0, 80 et 280.

- $Y = 0$ si la chaudière est sous garantie (événement G) : $P(Y = 0) = P(G) = 0,2$.
- $Y = 80$ si elle n'est plus sous garantie et n'est pas défectueuse ($\bar{G} \cap \bar{D}$) : $P(Y = 80) = P(\bar{G}) \times P_{\bar{G}}(\bar{D}) = 0,8 \times 0,9 = 0,72$.
- $Y = 280$ si elle n'est plus sous garantie et est défectueuse ($\bar{G} \cap D$) : $P(Y = 280) = P(\bar{G}) \times P_{\bar{G}}(D) = 0,8 \times 0,1 = 0,08$.

Vérification : $0,2 + 0,72 + 0,08 = 1$.

y_i	0	80	280
$P(Y = y_i)$	0,2	0,72	0,08

(b) **Espérance $E(Y)$:**

$$E(Y) = 0 \times 0,2 + 80 \times 0,72 + 280 \times 0,08 = 0 + 57,6 + 22,4 = \boxed{80}$$

(c) **Interprétation :** Le coût moyen du contrôle par chaudière pour la société est de **80 euros**.

6. Loi binomiale :

(a) On répète $n = 5$ fois de manière identique et indépendante (le tirage est assimilé à un tirage avec remise ou le parc est assez grand) une épreuve de Bernoulli. On s'intéresse aux chaudières **défectueuses**. Le succès est "la chaudière défectueuse est sous garantie". La probabilité du succès est $p = P_D(G) = \frac{1}{41}$ (calculé en question 4).

Ainsi, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(5; \frac{1}{41}\right)$.

(b) **Probabilité $P(X = 2)$:**

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{41}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{41}\right)^3 = 10 \times \frac{1}{1681} \times \left(\frac{40}{41}\right)^3 \approx \boxed{0,0055}$$

(c) **Probabilité $P(X \geq 3)$:** On cherche la probabilité d'obtenir au moins 3 succès. La calculatrice permettant de calculer des probabilités cumulées de la forme $P(X \leq k)$, on utilise l'événement contraire :

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2)$$

À la calculatrice, avec les paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{41}$, on obtient $P(X \leq 2) \approx 0,99986$.

D'où :

$$P(X \geq 3) \approx 1 - 0,99986 \approx \boxed{0,00014}$$

(d) **Indépendance :**

i. $P(G \cup D) = P(G) + P(D) - P(G \cap D) = 0,2 + 0,082 - 0,002 = \boxed{0,28}$.

ii. On compare $P(G \cap D)$ et $P(G) \times P(D)$:

$$P(G \cap D) = 0,002.$$

$$P(G) \times P(D) = 0,2 \times 0,082 = 0,0164.$$

Comme $P(G \cap D) \neq P(G) \times P(D)$, les événements G et D ne sont **pas indépendants**.

Exercice 2 : Étude de fonction

Partie A : Fonction auxiliaire g

$$g(x) = (x + 2)e^{x-4} - 2.$$

(a) **Limite en $+\infty$** : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-4} = +\infty$.

Par produit et somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

(b) **Limite en $-\infty$** : On écrit $g(x) = (x+2)e^x e^{-4} - 2 = e^{-4}(xe^x + 2e^x) - 2$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ (croissance comparée) et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = e^{-4}(0+0) - 2 = -2$.

(c) **Dérivée et variations** : g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables.

$$g'(x) = 1 \times e^{x-4} + (x+2) \times e^{x-4} = e^{x-4}(1+x+2) = (x+3)e^{x-4}.$$

Comme $e^{x-4} > 0$ pour tout x , le signe de $g'(x)$ est celui de $x+3$.

- $g'(x) < 0$ sur $] -\infty ; -3[$.
- $g'(x) > 0$ sur $] -3 ; +\infty[$.

Minimum en $x = -3$: $g(-3) = (-3+2)e^{-7} - 2 = -e^{-7} - 2 \approx -2,0009$.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	-2	$g(-3)$	$+\infty$

(d) **Théorème des valeurs intermédiaires** : Sur $] -\infty ; -3]$, $g(x)$ décroît de -2 à $g(-3) < -2$.
L'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution.

Sur $[-3 ; +\infty[$, g est continue et strictement croissante.

$g(-3) < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. $0 \in [g(-3) ; +\infty[$.

D'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x) = 0$ admet une **unique solution** α .

Calculatrice : $g(0,51) \approx -0,028$ et $g(0,52) \approx 0,035$.

Donc $0,51 < \alpha < 0,52$ (ou plus précis : $0,514 < \alpha < 0,515$).

(e) **Signe de g** :

- $g(x) < 0$ sur $] -\infty ; \alpha[$.
- $g(\alpha) = 0$.
- $g(x) > 0$ sur $] \alpha ; +\infty[$.

Partie B : Fonction f

$$f(x) = x^2 - x^2 e^{x-4} = x^2(1 - e^{x-4}).$$

(a) **Résolution de $f(x) = 0$** : $x^2(1 - e^{x-4}) = 0 \iff x^2 = 0$ ou $1 - e^{x-4} = 0$.

$$x^2 = 0 \iff x = 0.$$

$$e^{x-4} = 1 \iff x - 4 = 0 \iff x = 4.$$

Les solutions sont $\mathcal{S} = \{0; 4\}$.

(b) Dérivée et variations :

i. f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Dérivons la forme $f(x) = x^2 - x^2 e^{x-4}$.

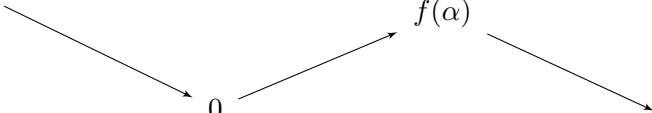
$$f'(x) = 2x - (2x \times e^{x-4} + x^2 \times e^{x-4})$$

$$f'(x) = 2x - e^{x-4}(2x + x^2) = x [2 - e^{x-4}(2 + x)].$$

On reconnaît l'expression de $g(x)$ dans le crochet : $g(x) = (x + 2)e^{x-4} - 2$, donc $2 - (x + 2)e^{x-4} = -g(x)$.

Ainsi : $f'(x) = -xg(x)$.

ii. **Tableau de variation :** Le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $-x$ et de $g(x)$.

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$-x$	+	0	-	-
$g(x)$	-		0	+
$f'(x)$	-	0	+	-
$f(x)$				

f est décroissante sur $] -\infty; 0]$, croissante sur $[0; \alpha]$ et décroissante sur $[\alpha; +\infty[$.

(c) **Maximum de f :** Le maximum sur $[0; +\infty[$ est atteint en α . $f(\alpha) = \alpha^2 - \alpha^2 e^{\alpha-4}$.

$$\text{Or } g(\alpha) = 0 \iff (\alpha + 2)e^{\alpha-4} = 2 \iff e^{\alpha-4} = \frac{2}{\alpha + 2}.$$

$$\text{En remplaçant dans } f(\alpha) : f(\alpha) = \alpha^2 \left(1 - \frac{2}{\alpha + 2}\right) = \alpha^2 \left(\frac{\alpha + 2 - 2}{\alpha + 2}\right) = \alpha^2 \frac{\alpha}{\alpha + 2} =$$

$$\frac{\alpha^3}{\alpha + 2}.$$

(d) **Tangente en 4 :** $y = f'(4)(x - 4) + f(4)$. $f(4) = 0$. $f'(4) = -4g(4)$.

$$\text{Calculons } g(4) = (4 + 2)e^0 - 2 = 6 - 2 = 4.$$

$$\text{Donc } f'(4) = -4 \times 4 = -16.$$

$$\text{L'équation est } y = -16(x - 4) \implies y = -16x + 64.$$

Exercice 3 : Géométrie dans l'espace

- (a) **Point A** : On remplace les coordonnées de $A(2; 3; 0)$ dans d_1 :
$$\begin{cases} 2 = 2 + t \implies t = 0 \\ 3 = 3 - t \implies 3 = 3 \text{ (ok)} \\ 0 = t \implies 0 = 0 \text{ (ok)} \end{cases}$$

Le système est cohérent pour $t = 0$, donc $A \in d_1$.

- (b) **Parallélisme** : Vecteur directeur de d_1 : $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (coeffs de t). Vecteur directeur de d_2 :

$\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (coeffs de t'). Les coordonnées ne sont pas proportionnelles ($2/1 \neq 1/(-1)$), donc

les vecteurs ne sont pas colinéaires. **Les droites ne sont pas parallèles.**

- (c) **Droite Δ** :

- i. Δ passe par $B(3; 3; 5)$ et de vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3 + k \\ y = 3 - 2k, k \in \mathbb{R} \\ z = 5 - 3k \end{cases}$$

- ii. **Intersection d_1 et Δ** :

On résout le système :
$$\begin{cases} 2 + t = 3 + k & (1) \\ 3 - t = 3 - 2k & (2) \\ t = 5 - 3k & (3) \end{cases}$$

Dans (3) on a t en fonction de k . Remplaçons dans (1) :

$$2 + (5 - 3k) = 3 + k \iff 7 - 3k = 3 + k \iff 4 = 4k \iff k = 1. \text{ Si } k = 1, \text{ alors } t = 5 - 3(1) = 2.$$

Vérifions dans (2) : $3 - 2 = 1$ et $3 - 2(1) = 1$. Ça marche. Les droites sont **sécantes**.

Point d'intersection pour $t = 2$: $x = 4, y = 1, z = 2$. $C(4; 1; 2)$.

- (d) **Orthogonalité** : On calcule le produit scalaire $\vec{u}_1 \cdot \vec{v}$:

$$\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + (-1) \times (-2) + 1 \times (-3) = 1 + 2 - 3 = 0.$$

Le produit scalaire est nul, donc les vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Les droites d_1 et Δ sont orthogonales.

Exercice 4 : Suites numériques

$$u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$

(a) **Calculs** : $u_1 = \frac{1(3)}{2^2} = \frac{3}{4}$, $u_2 = \frac{2(4)}{3^2} = \frac{8}{9}$.

$$v_2 = u_1 \times u_2 = \frac{3}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{24}{36} = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

$$u_3 = \frac{3(5)}{4^2} = \frac{15}{16}, v_3 = v_2 \times u_3 = \frac{2}{3} \times \frac{15}{16} = \frac{30}{48} = \boxed{\frac{5}{8}}.$$

(b) **Expression de u_n** : $u_n = \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \boxed{1 - \frac{1}{(n+1)^2}}.$

(c) **Encadrement** : Pour $n \geq 1$, $(n+1)^2 > 1$, donc $0 < \frac{1}{(n+1)^2} < 1$.

Donc $-1 < -\frac{1}{(n+1)^2} < 0$, d'où $0 < 1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 1$.

On a bien $\boxed{0 < u_n < 1}$.

(d) i. **Sens de variation de (v_n)** : $v_{n+1} = v_n \times u_{n+1}$.

Comme v_n est un produit de nombres strictement positifs, $v_n > 0$.

De plus, $0 < u_{n+1} < 1$.

En multipliant v_n par un nombre compris entre 0 et 1, on obtient un résultat plus petit.

Donc $v_{n+1} < v_n$. La suite est **décroissante**.

ii. **Convergence** : La suite (v_n) est décroissante et minorée par 0 (car tous les termes sont positifs). D'après le théorème de convergence monotone, la suite (v_n) est **convergente**.

(e) i. **Relation** : $v_{n+1} = v_n \times u_{n+1} = v_n \times \frac{(n+1)((n+1)+2)}{((n+1)+1)^2} = v_n \times \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$. C'est vérifié.

ii. **Récurrence** : On veut montrer $P(n) : v_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$ pour $n \geq 1$.

Initialisation : Pour $n = 1$, $v_1 = u_1 = 3/4$.

Propriété : $\frac{1+2}{2 \cdot (2)} = 3/4$. Vrai.

Hérédité : Supposons $v_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$. $v_{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)} \times \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$.

On simplifie par $(n+2)$ et $(n+1)$: $v_{n+1} = \frac{1}{2} \times \frac{n+3}{n+2} = \frac{(n+1)+2}{2((n+1)+1)}$.

La propriété est héréditaire.

Conclusion : La formule est vraie pour tout $n \geq 1$.

iii. **Limite** : $v_n = \frac{n(1+2/n)}{2n(1+1/n)} = \frac{1}{2} \times \frac{1+2/n}{1+1/n}$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{2}}$.

(f) **Python** : La variable 'v' doit être mise à jour en la multipliant par le terme courant 'u'.

```
1 def suitev(n):  
2     v = 1  
3     for i in range(1, n+1):  
4         u = (i * (i + 2)) / (i + 1)**2  
5         v = v * u  
6     return v  
7
```