

Exercice 1 : Probabilités (5 points)

Pour maintenir le système de chauffage en bon état, une société immobilière fait contrôler les chaudières de son parc de logement pendant l'été.

- On sait que 20 % des chaudières sont sous garantie.
- Parmi les chaudières sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de 0,01.
- 10 % des chaudières qui ne sont plus sous garantie sont défectueuses.

On choisit une chaudière au hasard et on considèrera les évènements suivants :

- G : « La chaudière est sous garantie »
- D : « La chaudière est défectueuse »

1. Réaliser un arbre pondéré illustrant la situation.
2. Calculer la probabilité de l'évènement suivant : A : « La chaudière est sous garantie et défectueuse ».
3. Calculer $P(D)$.
4. Un technicien intervient dans un logement où la chaudière est défectueuse. Montrer que la probabilité que cette chaudière soit sous garantie est $\frac{1}{41}$.
5. Le contrôle est gratuit si la chaudière est sous garantie.
 - Il coûte 80 euros si la chaudière n'est plus sous garantie et n'est pas défectueuse.
 - Il coûte 280 euros dans le cas d'une chaudière défectueuse qui n'est plus sous garantie.

Soit Y la variable aléatoire représentant le coût du contrôle d'une chaudière.

- (a) Déterminer la loi de probabilité de Y .
- (b) Calculer l'espérance $E(Y)$.
- (c) Que représente l'espérance ici ?
6. Au cours d'une tournée, on a trouvé 5 chaudières défectueuses. On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de chaudières sous garantie parmi ces 5 chaudières.
 - (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
 - (b) Quelle est la probabilité que deux de ces cinq chaudières soient sous garantie ?
 - (c) Quelle est la probabilité qu'au moins trois de ces cinq chaudières soient sous garantie ?
7. (a) Calculer $P(G \cup D)$.
- (b) Les évènements G et D sont-ils indépendants ? Justifier.

Exercice 2 : Étude de fonction (6 points)

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (x + 2)e^{x-4} - 2$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Démontrer que la limite de g en $-\infty$ vaut -2 .
Indication : On pourra utiliser le fait que $e^{x-4} = e^x \times e^{-4}$.
3. On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa dérivée. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x puis dresser le tableau de variations de g .
4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α .
5. En déduire le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Étude de la fonction f

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - x^2 e^{x-4}$$

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
 - (a) Démontrer que, pour tout réel x : $f'(x) = -xg(x)$, où la fonction g est celle définie à la partie A.
 - (b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Remarque : On ne demande pas les limites pour cette question. On se contentera de les lire sur la calculatrice et de les reporter dans le tableau de variations.
3. Démontrer que le maximum de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$ est égal à $\frac{\alpha^3}{\alpha + 2}$.
4. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4.

Exercice 3 : Géométrie dans l'espace (4 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

On considère deux droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques :

$$d_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = -5 + 2t' \\ y = -1 + t', t' \in \mathbb{R} \\ z = 5 \end{cases}$$

- Vérifier que le point $A(2; 3; 0)$ appartient à la droite d_1 .
- Donner un vecteur directeur $\vec{u}_1$ de la droite d_1 et un vecteur directeur $\vec{u}_2$ de la droite d_2 . Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier.
- On considère maintenant la droite Δ dirigée par le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, et passant par le point $B(3; 3; 5)$.
 - Donner une représentation paramétrique de cette droite Δ .
 - Les droites d_1 et Δ sont-elles sécantes ? Justifier la réponse.
- La droite Δ est-elle orthogonale à d_1 ? Justifier.

Exercice 4 : Suites numériques (5 points)

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel non nul n , par :

$$u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

La suite (v_n) est définie par : $v_1 = u_1, v_2 = u_1 \times u_2$ et pour tout entier naturel $n \geq 3$,

$$v_n = u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n = v_{n-1} \times u_n$$

- Vérifier que l'on a $v_2 = \frac{2}{3}$ puis calculer v_3 .
- Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , $u_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$.
- Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , $0 < u_n < 1$.
- Montrer que la suite (v_n) est décroissante.
 - Justifier que la suite (v_n) est convergente (on ne demande pas de calculer sa limite).
- Vérifier que, pour tout entier naturel non nul n , $v_{n+1} = v_n \times \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$.
 - Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n , $v_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$.

(c) Déterminer la limite de la suite (v_n) .

6. On considère la fonction Python `suitev` suivante :

```
def suitev(n):  
    v = 1  
    for i in range(1, n+1):  
        u = (i * (i + 2)) / (i + 1)**2  
        v = .....  
    return v
```

Compléter les pointillés de manière à ce que cette fonction renvoie, pour une valeur de n donnée par l'utilisateur, le terme v_n .