

Exercice 1 : Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $D_f =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x - 2}$$

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

En $\pm\infty$: On a une forme indéterminée de type « ∞/∞ ». Pour lever l'indétermination d'une fraction rationnelle en l'infini, on considère le rapport des termes de plus haut degré :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

En 2 : On étudie le signe du dénominateur et la limite du numérateur.

- $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x + 1) = 2^2 + 3(2) + 1 = 11$.
- $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0$.
- Si $x \rightarrow 2^-$ (c'est-à-dire $x < 2$), alors $x - 2 < 0$. Par quotient : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$.
- Si $x \rightarrow 2^+$ (c'est-à-dire $x > 2$), alors $x - 2 > 0$. Par quotient : $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$.

2. Asymptotes parallèles aux axes.

Puisque $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \pm\infty$, on en déduit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une **asymptote verticale** d'équation :

$$\boxed{x = 2}$$

(Note : Les limites en l'infini étant infinies, il n'y a pas d'asymptote horizontale).

3. Calcul de la dérivée.

La fonction f est dérivable sur D_f comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Posons $u(x) = x^2 + 3x + 1$ et $v(x) = x - 2$. On a $u'(x) = 2x + 3$ et $v'(x) = 1$. La formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ donne :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x + 3)(x - 2) - (x^2 + 3x + 1)(1)}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{2x^2 - 4x + 3x - 6 - x^2 - 3x - 1}{(x - 2)^2} \\ &= \frac{x^2 - 4x - 7}{(x - 2)^2} \end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat demandé :

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^2 - 4x - 7}{(x - 2)^2}}$$

4. Tableau de variation complet de f .

Pour étudier le signe de $f'(x)$, on étudie le signe du numérateur $N(x) = x^2 - 4x - 7$ (le dénominateur $(x - 2)^2$ étant strictement positif sur D_f).

Discriminant : $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(-7) = 16 + 28 = 44$. $\Delta > 0$, donc le trinôme admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{44}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{11}}{2} = 2 - \sqrt{11} \quad (\approx -1, 32)$$

$$x_2 = \frac{4 + \sqrt{44}}{2} = 2 + \sqrt{11} \quad (\approx 5, 32)$$

Calculons les extremums locaux :

- $f(2 - \sqrt{11}) = \frac{(2 - \sqrt{11})^2 + 3(2 - \sqrt{11}) + 1}{2 - \sqrt{11} - 2} = \frac{15 - 4\sqrt{11} + 6 - 3\sqrt{11} + 1}{-\sqrt{11}} = \frac{22 - 7\sqrt{11}}{-\sqrt{11}} = 7 - 2\sqrt{11}$.
- De même, $f(2 + \sqrt{11}) = 7 + 2\sqrt{11}$.

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{11}$	2	$2 + \sqrt{11}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	$7 - 2\sqrt{11}$	$+\infty$	$7 + 2\sqrt{11}$	$+\infty$

5. Questions facultatives :

(a) **Tangente parallèle à d_1 ($y = -10x + 20$).**

Le coefficient directeur de d_1 est -10 . On cherche s'il existe $x \in D_f$ tel que $f'(x) = -10$.

$$\frac{x^2 - 4x - 7}{(x - 2)^2} = -10 \iff x^2 - 4x - 7 = -10(x^2 - 4x + 4)$$

$$x^2 - 4x - 7 = -10x^2 + 40x - 40 \iff 11x^2 - 44x + 33 = 0$$

En simplifiant par 11 : $x^2 - 4x + 3 = 0$. On a une racine évidente $x = 1$ (car $1 - 4 + 3 = 0$).

Le produit des racines est $c/a = 3$, donc l'autre racine est $x = 3$.

Il existe donc **deux tangentes** parallèles à d_1 aux points d'abscisses 1 et 3.

Pour $x = 3$, $f(3) = \frac{9+9+1}{1} = 19$. Équation : $y = -10(x - 3) + 19 \Rightarrow y = -10x + 49$.

(b) **Asymptote oblique.**

On conjecture l'asymptote $y = x + 5$. Étudions la limite de la différence :

$$\begin{aligned} f(x) - (x + 5) &= \frac{x^2 + 3x + 1}{x - 2} - \frac{(x + 5)(x - 2)}{x - 2} \\ &= \frac{x^2 + 3x + 1 - (x^2 - 2x + 5x - 10)}{x - 2} \\ &= \frac{x^2 + 3x + 1 - x^2 - 3x + 10}{x - 2} = \frac{11}{x - 2} \end{aligned}$$

Or, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{11}{x - 2} = 0$. On a donc bien démontré que la droite $\Delta : y = x + 5$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et $+\infty$.

(c) **Centre de symétrie.**

Le centre de symétrie est l'intersection des asymptotes : $\Omega(2; 7)$ (car $x = 2$ et $y = 2 + 5 = 7$).

Posons $a = 2$ et $b = 7$. On vérifie $f(2 - x) + f(2 + x) = 2b = 14$ pour $x \neq 0$.

On a vu précédemment que $f(x) = x + 5 + \frac{11}{x - 2}$.

Posons $X = x - 2$, alors $f(X + 2) = (X + 2) + 5 + \frac{11}{X} = X + 7 + \frac{11}{X}$.

La fonction $g(X) = f(X + 2) - 7 = X + \frac{11}{X}$ est impaire ($g(-X) = -g(X)$).

La courbe est donc symétrique par rapport au point $\Omega(2; 7)$.

Exercice 2 : Géométrie dans l'espace

On travaille dans le repère $(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$. C'est un repère quelconque (non nécessairement orthonormé).

1. **Coordonnées des points.** Par définition du repère :

- B est l'origine : $B(0; 0; 0)$.
- $\overrightarrow{BC}$ est le premier vecteur de base : $C(1; 0; 0)$.
- $\overrightarrow{BD}$ est le deuxième vecteur de base : $D(0; 1; 0)$.
- $\overrightarrow{BA}$ est le troisième vecteur de base : $A(0; 0; 1)$.

Pour les milieux :

- I milieu de $[AB]$: $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right) \Rightarrow I\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$.
- J milieu de $[CD]$: $J\left(\frac{x_C + x_D}{2}; \frac{y_C + y_D}{2}; \frac{z_C + z_D}{2}\right) \Rightarrow J\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$.

2. (a) **Coordonnées de E.** $IACE$ est un parallélogramme $\iff \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{EC} \iff \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AI}$. Or $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$. Par relation de Chasles : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AI}$.

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

Dans le repère, cela signifie que $\overrightarrow{BE} = 1 \cdot \overrightarrow{BC} + 0 \cdot \overrightarrow{BD} - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA}$. Donc $E \left(1; 0; -\frac{1}{2} \right)$.

- (b) **Coordonnées de F.** $IBDF$ est un parallélogramme $\iff \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{FD} \iff \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BI}$. Or $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA}$. Par Chasles : $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BA}$.

$$\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}$$

Dans le repère : $\overrightarrow{BF} = 0 \cdot \overrightarrow{BC} + 1 \cdot \overrightarrow{BD} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BA}$. Donc $F \left(0; 1; \frac{1}{2} \right)$.

3. (a) **Coordonnées des vecteurs.**

$$\overrightarrow{EF} \begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \\ z_F - z_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 1 - 0 \\ \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{EJ} \begin{pmatrix} x_J - x_E \\ y_J - y_E \\ z_J - z_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 1 \\ \frac{1}{2} - 0 \\ 0 - (-\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- (b) **Position de J.** On remarque immédiatement que $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{EF}$. Cela signifie que les vecteurs sont colinéaires et de même sens, et que la distance EJ vaut la moitié de la distance EF .
Conclusion : J est le milieu du segment $[FE]$.

4. (a) **Représentation paramétrique de (EF) .** La droite (EF) passe par $E(1; 0; -\frac{1}{2})$ et a pour vecteur directeur $\vec{u} = \overrightarrow{EF}(-1; 1; 1)$.

$$(EF) : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 + t \\ z = -\frac{1}{2} + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

- (b) **Point H.** $H \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{1}{3} \right)$ appartient-il à (EF) ? On résout le système :

$$\begin{cases} 1 - t = 1/4 \\ t = 3/4 \\ -1/2 + t = 1/3 \end{cases}$$

La deuxième équation donne $t = 3/4$. Vérifions dans la première : $1 - 3/4 = 1/4$ (Vrai). Vérifions dans la troisième : $-1/2 + 3/4 = -2/4 + 3/4 = 1/4$. Or on veut $1/3$. $1/4 \neq 1/3$, le système n'a pas de solution. **Le point H n'appartient pas à la droite (EF) .**

5. **Position relative de (EF) et (ID) .** Vecteur directeur de (ID) : $\overrightarrow{ID} = \begin{pmatrix} x_D - x_I \\ y_D - y_I \\ z_D - z_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 1 - 0 \\ 0 - \frac{1}{2} \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\overrightarrow{EF}(-1; 1; 1)$ et $\overrightarrow{ID}(0; 1; -1/2)$ ne sont manifestement pas colinéaires (coordonnée $x \neq 0$ pour l'un, 0 pour l'autre). Les droites ne sont pas parallèles.

Sont-elles sécantes ? On résout le système avec deux paramètres t et k :

$$M \in (EF) \iff M(1-t; t; -0,5+t)$$

$$M \in (ID) \iff M(0; k; 0,5-0,5k)$$

Identification :

$$\begin{cases} 1-t=0 & (1) \\ t=k & (2) \\ -0,5+t=0,5-0,5k & (3) \end{cases}$$

(1) donne $t = 1$. (2) donne $k = 1$. On vérifie dans (3) : $-0,5 + 1 = 0,5$ (membre gauche) et $0,5 - 0,5(1) = 0$ (membre droite). $0,5 \neq 0$. Impossible.

Conclusion : Les droites ne sont ni parallèles ni sécantes, elles sont **non coplanaires**.

6. Questions facultatives :

(a) Placement des points et coordonnées de L.

1. Coordonnées de K : Le point K est défini par $\overrightarrow{CK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA}$. Dans le repère $(B; \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$, on a : $C(1; 0; 0)$ et $A(0; 0; 1)$.

$$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\overrightarrow{CK} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,75 \\ 0 \\ 0,75 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de $K(x_K; y_K; z_K)$ vérifient $\overrightarrow{CK} = \begin{pmatrix} x_K-1 \\ y_K-0 \\ z_K-0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} x_K-1 = -0,75 \\ y_K = 0 \\ z_K = 0,75 \end{cases} \iff \begin{cases} x_K = 0,25 \\ y_K = 0 \\ z_K = 0,75 \end{cases}$$

On a donc $K(0,25; 0; 0,75)$.

2. Détermination de L (Intersection de (IK) et (BC)) :

Représentation paramétrique de la droite (IK) : Elle passe par $I(0; 0; 0,5)$ et a pour vecteur

directeur $\overrightarrow{IK}$.

$$\overrightarrow{IK} = \begin{pmatrix} 0,25 - 0 \\ 0 - 0 \\ 0,75 - 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0 \\ 0,25 \end{pmatrix}$$

Pour simplifier les calculs, choisissons un vecteur directeur colinéaire $\vec{u} = 4\overrightarrow{IK} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de (IK) est donc :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0,5 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Intersection avec (BC) : La droite (BC) est l'axe des abscisses du repère (passant par l'origine B et le point unité C). Elle est caractérisée par $y = 0$ et $z = 0$. On cherche le point de (IK) tel que $z = 0$:

$$0,5 + t = 0 \iff t = -0,5$$

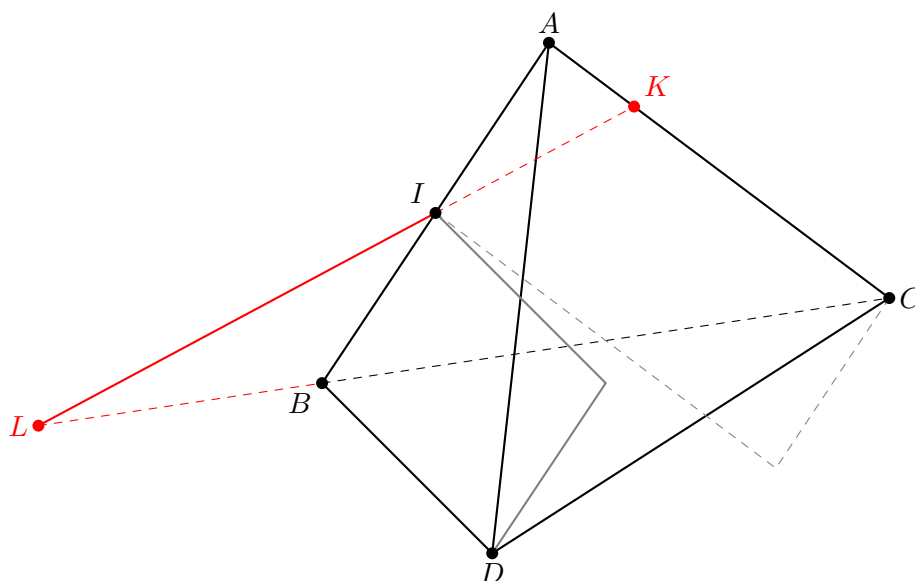
On reporte cette valeur dans l'expression de x :

$$x = -0,5$$

Le point d'intersection L a donc pour coordonnées :

$$L(-0,5; 0; 0)$$

3. Figure complétée :



(b) Démonstration géométrique (J milieu de $[FE]$).

$$\overrightarrow{EJ} + \overrightarrow{FJ} = (\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CJ}) + (\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DJ}).$$

Comme J est milieu de $[CD]$: $\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{DJ} = \vec{0}$.

Il reste $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{FD}$. Or $IACE$ est un parallélogramme $\implies \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{IA}$.

Et $IBDF$ parallélogramme $\implies \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{IB}$.

Donc la somme vaut $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}$. I étant milieu de $[AB]$, $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Finalement $\overrightarrow{EJ} + \overrightarrow{FJ} = \vec{0}$, donc J est bien le milieu de $[FE]$.