

Exercice 1

1. **Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4 \times 3^n - 1$.**

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 3$. La formule donne $4 \times 3^0 - 1 = 4 \times 1 - 1 = 3$. L'égalité est vérifiée au rang 0.

Hérédité : Supposons que pour un entier $n \geq 0$, $u_n = 4 \times 3^n - 1$.

Montrons que $u_{n+1} = 4 \times 3^{n+1} - 1$.

On sait que $u_{n+1} = 3u_n + 2$. En utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3(4 \times 3^n - 1) + 2 \\ &= 12 \times 3^n - 3 + 2 \\ &= 4 \times 3 \times 3^n - 1 \\ &= 4 \times 3^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4 \times 3^n - 1$.

2. **Étude de la monotonie de (v_n) .**

On a $v_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!}$. Comme $v_n > 0$, étudions le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{n!n!}} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \times \frac{n!n!}{(2n)!}$$

Or $(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)!$ et $(n+1)! = (n+1)n!$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{2(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{n+1} = \frac{4n+2}{n+1}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $4n+2 > n+1$ (car $3n > -1$, toujours vrai). Donc $\frac{v_{n+1}}{v_n} > 1$, ce qui implique $v_{n+1} > v_n$. **La suite (v_n) est donc strictement croissante.**

3. **Encadrement de $f(x)$ pour $x < 0$.**

Soit $x < 0$. On part de l'encadrement classique du sinus :

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

On ajoute 4 :

$$3 \leq \sin(x) + 4 \leq 5$$

La fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$, donc :

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{\sin(x) + 4} \leq \frac{1}{3}$$

On multiplie par $(x - 1)$. Comme $x < 0$, on a $x - 1 < -1 < 0$. **L'inégalité change donc de sens :**

$$\frac{x-1}{5} \geq \frac{x-1}{\sin(x) + 4} \geq \frac{x-1}{3}$$

Soit :

$$\frac{x-1}{3} \leq f(x) \leq \frac{x-1}{5}$$

(Note : comme $x - 1$ est négatif, $\frac{x-1}{3}$ est bien plus petit, c'est-à-dire "plus négatif", que $\frac{x-1}{5}$).

Exercice 2

1. Calcul des premiers termes :

$$\begin{aligned} \bullet u_1 &= \frac{1}{3}u_0 + \frac{2}{3}(0) + 1 = \frac{1}{3}(1) + 1 = \frac{4}{3}. \\ \bullet u_2 &= \frac{1}{3}u_1 + \frac{2}{3}(1) + 1 = \frac{1}{3} \times \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + 1 = \frac{4}{9} + \frac{6}{9} + \frac{9}{9} = \frac{19}{9}. \\ \bullet u_3 &= \frac{1}{3}u_2 + \frac{2}{3}(2) + 1 = \frac{1}{3} \times \frac{19}{9} + \frac{4}{3} + 1 = \frac{19}{27} + \frac{36}{27} + \frac{27}{27} = \frac{82}{27}. \end{aligned}$$

$$2. (a) v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \left(\frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}n + 1\right) - n - 1 = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}n - n = \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{3}n = \frac{1}{3}(u_n - n) = \frac{1}{3}v_n. (v_n) \text{ est donc une suite géométrique de raison } q = \frac{1}{3}. \text{ Son premier terme est } v_0 = u_0 - 0 = 1.$$

(b) On en déduit $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Comme $v_n = u_n - n$, on a $u_n = v_n + n$, d'où :

$$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + n$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \text{ car } -1 < \frac{1}{3} < 1. \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty. \text{ Par somme, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

(d) **Algorithme Python :**

```
1 def seuil():
2     u = 1
3     n = 0
4     while u < 2020:
5         n = n + 1
6         u = (1/3)**n + n
7     return(n)
```

*Note : On peut aussi utiliser la relation de récurrence dans la boucle ($u = u/3 + 2 * n/3 + 1$), mais il faut faire attention à l'indice n utilisé. La méthode utilisant la forme explicite est plus sûre ici.*

$$3. (a) S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n \left[\left(\frac{1}{3}\right)^k + k \right] = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k + \sum_{k=0}^n k.$$

La première somme est la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1 - (1/3)^{n+1}}{1 - 1/3} = \frac{1 - (1/3)^{n+1}}{2/3} = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

La seconde est la somme des premiers entiers : $\frac{n(n+1)}{2}$.

$$\text{D'où : } S_n = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n^2 + n}{2}.$$

$$(b) w_n = \frac{S_n}{n^2} = \frac{3}{2n^2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n^2 + n}{2n^2}.$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, donc le premier terme tend vers 0. Pour le second terme : $\frac{n^2 + n}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$,
dont la limite est $\frac{1}{2}$.

$$\text{Ainsi, } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \frac{1}{2}.$$

Exercice 3

Partie A

1. g est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = 1 \times e^x + (x+1) \times e^x = e^x(1+x+1) = (x+2)e^x.$$

2. Étude du signe de $g'(x)$: Comme $e^x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $x+2$.

- $x+2 = 0 \iff x = -2$.
- $x+2 > 0 \iff x > -2$.

Limites :

- En $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.
- En $-\infty$: $g(x) = xe^x + e^x$. On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ (croissance comparée) et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.
Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$.

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	0	$-e^{-2}$	$+\infty$

Valeur du minimum : $g(-2) = (-2 + 1)e^{-2} = -e^{-2} = -\frac{1}{e^2}$.

3. Le minimum de g sur $\mathbb{R}$ est $-e^{-2} \approx -0,135$.

Or $-0,135 > -1$. Donc pour tout x , $\boxed{g(x) > -1}$.

Partie B

1. $f(x)$ existe si le dénominateur est non nul.

Dénominateur : $(x + 1)e^x + 1 = g(x) + 1$.

D'après la question A.3, $g(x) > -1 \implies g(x) + 1 > 0$.

Le dénominateur est strictement positif, donc ne s'annule jamais. f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Limite en $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} ((x + 1)e^x + 1) = \lim(g(x) + 1) = 0 + 1 = 1.$$

Donc par quotient, $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0}$.

3. Limite en $+\infty$: On factorise par e^x au dénominateur (pour $x \neq -1$) :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x(x + 1 + e^{-x})} = \frac{1}{x + 1 + e^{-x}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0.$$

Donc le dénominateur tend vers $+\infty$.

Par quotient, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$.

4. Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, la droite d'équation $\boxed{y = 0}$ est asymptote horizontale à la courbe en $-\infty$ et $+\infty$.

Partie C

1. $g_m(x) = 0 \iff x + 1 - me^{-x} = 0 \iff x + 1 = me^{-x}$.

En multipliant par e^x (qui est non nul) : $(x + 1)e^x = m \iff \boxed{g(x) = m}$.

2. Les points d'intersection de $\mathcal{C}_m$ avec l'axe des abscisses correspondent aux solutions de $g_m(x) = 0$, donc aux solutions de $g(x) = m$.

D'après le tableau de variation de g (décroissante de 0 à $-e^{-2}$ puis croissante de $-e^{-2}$ à $+\infty$) :

- Si $m < -e^{-2}$: **0 point d'intersection**.
- Si $m = -e^{-2}$: **1 point d'intersection** (en $x = -2$).
- Si $-e^{-2} < m < 0$: **2 points d'intersection** (car m est compris entre le minimum et la limite en $-\infty$).
- Si $m \geq 0$: **1 point d'intersection** (la branche sur $] -\infty; -2]$ tend vers 0 et reste négative ou nulle si on considère la limite stricte, la branche sur $[-2; +\infty[$ couvre $[-e^{-2}; +\infty[$ donc traverse $m \geq 0$ une seule fois).

Exercice 4

Urne : 5 noires (1, 2, 3, 4, 5) et 3 rouges (6, 7, 8). Total = 8 boules.

1. **Tirages avec remise (5 boules).** Chaque tirage a 8 issues possibles. C'est une liste de longueur 5 (p-uplet).

(a) Nombre total : $8^5 = \boxed{32\,768}$.

(b) 1^{re} Noire (5 choix), 2^e Rouge (3 choix), les 3 autres quelconques (8^3 choix). $5 \times 3 \times 8^3 = 15 \times 512 = \boxed{7\,680}$.

(c) « La 1^{re} boule rouge est en 3^e position » signifie : Noire, Noire, Rouge, quelconque, quelconque. $5 \times 5 \times 3 \times 8 \times 8 = 75 \times 64 = \boxed{4\,800}$.

(d) Au moins une rouge = Total - « Que des noires ». Tirages avec que des noires : $5^5 = 3125$.
Résultat : $32\,768 - 3\,125 = \boxed{29\,643}$.

2. **Tirages sans remise (8 boules).** Il s'agit de permutations des 8 boules.

(a) Nombre total : $8! = \boxed{40\,320}$.

(b) 1^{re} Noire (5), 2^e Rouge (3), les 6 autres sont les boules restantes ($6!$). $5 \times 3 \times 6! = 15 \times 720 = \boxed{10\,800}$.

(c) 1^{re} rouge en 3^e pos $\implies$ N, N, R, et les 5 autres quelconques. Choix : 5×4 (pour les 2 noires) $\times 3$ (pour la rouge) $\times 5!$ (pour le reste). $20 \times 3 \times 120 = 60 \times 120 = \boxed{7\,200}$.

3. **Tirage simultané de 2 boules.** Nombre total de combinaisons : $\binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$.

• Évènement A « 2 rouges » : On choisit 2 rouges parmi 3. $\binom{3}{2} = 3$. $P(A) = \boxed{\frac{3}{28}}$.

• Évènement B « même couleur » : (2 Rouges) OU (2 Noires). 2 Rouges : 3 façons. 2 Noires : $\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ façons. Total cas favorables : $3 + 10 = 13$. $P(B) = \boxed{\frac{13}{28}}$.

Exercice 5

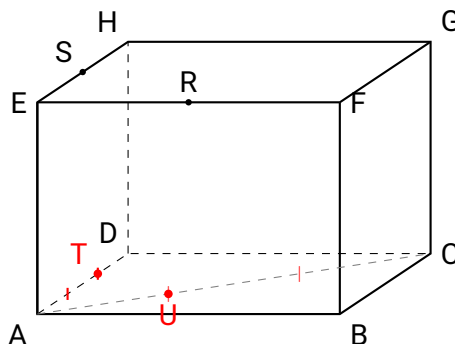
Partie A

1. On a $\overrightarrow{UC} = 2\overrightarrow{AU}$.

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{UC} = \overrightarrow{UA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AU} + \overrightarrow{AC}$.

Donc $-\overrightarrow{AU} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AU} \iff \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AU} \iff \boxed{\overrightarrow{AU} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}}$.

2. *Construction* : T est aux $2/3$ de $[AD]$. U est au $1/3$ de la diagonale $[AC]$ de la base.



3. On décompose dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

$$\bullet \overrightarrow{TU} = \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AU} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

$$\text{Or } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \text{ (ABCD parallélogramme). } \overrightarrow{TU} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \boxed{\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}}.$$

$$\bullet \overrightarrow{TR} = \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AR}. \overrightarrow{TA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}.$$

$$R \text{ milieu de } [EF], \text{ donc } \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ER} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}. \overrightarrow{TR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.$$

$$\bullet \overrightarrow{TS} = \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AS}. S \text{ milieu de } [EH], \text{ donc } \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}. \overrightarrow{TS} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \boxed{-\frac{1}{6}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}}.$$

$$4. 9\overrightarrow{TU} + 6\overrightarrow{TS} = 9\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right) + 6\left(-\frac{1}{6}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\right) = 3\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} + 6\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AD} + 6\overrightarrow{AE}.$$

$$\text{Observons } 6\overrightarrow{TR} = 6\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\right) = 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AD} + 6\overrightarrow{AE}.$$

$$\text{Donc } \boxed{9\overrightarrow{TU} + 6\overrightarrow{TS} = 6\overrightarrow{TR}}.$$

5. On a trouvé une relation linéaire entre les vecteurs : $3\overrightarrow{TU} + 2\overrightarrow{TS} = 2\overrightarrow{TR}$. Les vecteurs sont coplanaires, donc **les points T, U, R et S sont coplanaires**.

$$6. \overrightarrow{AL} = x\overrightarrow{AB}. L \in (TU) \text{ donc } \overrightarrow{TL} \text{ et } \overrightarrow{TU} \text{ sont colinéaires, ou encore } L, T, U \text{ alignés. } \overrightarrow{TL} = \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{AL} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + x\overrightarrow{AB}. \overrightarrow{TU} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}.$$

$$\text{Colinéarité : } x\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = k\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right).$$

Identification des coefficients (car $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ non colinéaires) :

$$\text{Sur } \overrightarrow{AD} : -\frac{2}{3} = -\frac{k}{3} \implies k = 2.$$

$$\text{Sur } \overrightarrow{AB} : x = \frac{k}{3} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Donc } \boxed{x = \frac{2}{3}}.$$

Partie B

Repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Coordonnées des sommets : $A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), D(0, 1, 0), E(0, 0, 1)$.

1.
 - $F : \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$. Donc $\boxed{F(1; 0; 1)}$.
 - S : milieu de $[EH]$. $E(0, 0, 1), H(0, 1, 1)$. $\boxed{S(0; 0, 5; 1)}$.
 - $M : \overrightarrow{DM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{DC} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$. Donc $\boxed{M(0, 4; 1; 0)}$. (Note : $2/5 = 0,4$).
 - $N : \overrightarrow{BN} = y\overrightarrow{BC} = y\overrightarrow{AD}$. $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$. Donc $\boxed{N(1; y; 0)}$.
2. Les points F, S, M et N sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{FS}, \overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{FN}$ sont coplanaires.

Calculons les coordonnées des vecteurs :

- $\overrightarrow{FS}(0 - 1; 0, 5 - 0; 1 - 1)$ soit $\overrightarrow{FS}(-1; 0, 5; 0)$.
- $\overrightarrow{FM}(0, 4 - 1; 1 - 0; 0 - 1)$ soit $\overrightarrow{FM}(-0, 6; 1; -1)$.
- $\overrightarrow{FN}(1 - 1; y - 0; 0 - 1)$ soit $\overrightarrow{FN}(0; y; -1)$.

Les vecteurs $\overrightarrow{FS}$ et $\overrightarrow{FM}$ ne sont pas colinéaires (leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, par exemple sur la cote z). Ils définissent donc un plan.

Les vecteurs sont coplanaires s'il existe deux réels a et b tels que :

$$\overrightarrow{FN} = a\overrightarrow{FS} + b\overrightarrow{FM}$$

Ce qui équivaut au système suivant :

$$\begin{cases} 0 = -1a - 0,6b \\ y = 0,5a + 1b \\ -1 = 0a - 1b \end{cases}$$

Réolvons ce système : De la troisième ligne, on déduit immédiatement :

$$-1 = -b \iff b = 1$$

On remplace b par 1 dans la première ligne :

$$0 = -a - 0,6 \times 1 \iff a = -0,6$$

On remplace enfin a et b dans la deuxième ligne pour trouver y :

$$y = 0,5 \times (-0,6) + 1 \times 1$$

$$y = -0,3 + 1$$

$$y = 0,7$$

La valeur du réel y pour que les points soient coplanaires est $\boxed{y = 0,7}$.