

Exercice 1

1. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 3u_n + 2$.

Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n = 4 \times 3^n - 1$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \binom{2n}{n}$. Prouver que la suite (v_n) est strictement croissante.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on considère $f(x) = \frac{x-1}{\sin(x)+4}$.

L'affirmation suivante est fausse : « pour tout $x < 0$, $\frac{x-1}{3} \geq f(x) \geq \frac{x-1}{5}$ ».

Déterminer, en détaillant toutes les étapes, l'encadrement de f qui est correct.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}n + 1$.

1. Calculer les valeurs de u_1 , u_2 et u_3 .

2. (a) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - n$.

Montrer que (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et calculer v_0 .

- (b) En déduire que, pour tout entier n , $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + n$.

- (c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

- (d) Recopier et compléter l'algorithme qui détermine le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \geq 2020$.

```
def seuil():
    u = .....
    n = .....
    while ..... :
        u = .....
        n = .....
    return(.....)
```

3. On pose pour tout entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

- (a) Pour tout entier n , exprimer S_n en fonction de n .

- (b) Calculer la limite de la suite (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $w_n = \frac{S_n}{n^2}$.

Exercice 3

Partie A

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = (x + 1)e^x$.

1. Montrer que, pour tout réel x , $g'(x) = (x + 2)e^x$.
2. Dresser le tableau de variation de g , en justifiant soigneusement les limites en $-\infty$ et $+\infty$.
3. Justifier que pour tout réel x , $g(x) > -1$.

Partie B

On considère la fonction définie par $f(x) = \frac{e^x}{(x + 1)e^x + 1}$.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. La courbe représentant f admet-elle des asymptotes ? Si oui, préciser leurs équations.

Partie C

On définit la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par $g_m(x) = x + 1 - me^{-x}$ et on note $\mathcal{C}_m$ la courbe de la fonction g_m dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $g(x) = m$.
2. Dédire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel m .

Exercice 4

Une urne contient huit boules : cinq noires, numérotées de 1 à 5, et trois rouges, numérotées 6, 7 et 8. Les boules sont indiscernables au toucher.

1. On extrait cinq boules successivement, avec remise. Déterminer :
 - (a) Le nombre total de tirages ;
 - (b) Le nombre de tirages tels que la première boule tirée soit noire et la deuxième soit rouge ;
 - (c) Le nombre de tirages tels que la première boule rouge tirée soit en troisième position ;
 - (d) Le nombre de tirages possédant au moins une boule rouge.
2. On extrait les huit boules de l'urne successivement et sans remise. Déterminer :
 - (a) Le nombre total de tirages ;
 - (b) Le nombre de tirages tels que la première boule tirée soit noire et la deuxième soit rouge ;
 - (c) Le nombre de tirages tels que la première boule rouge tirée soit en troisième position.

3. On extrait simultanément deux boules de l'urne. Déterminer les probabilités des évènements suivants :

A : « les deux boules tirées sont rouges » ;

B : « les deux boules tirées sont de même couleur ».

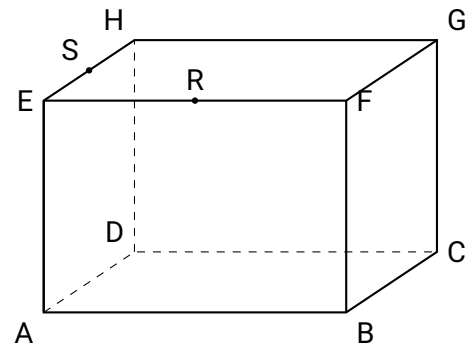
Les probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles.

Exercice 5

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède. R est le milieu de $[EF]$ et S est le milieu de $[EH]$. Les points T et U sont définis par $\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{UC} = 2\overrightarrow{AU}$.

Partie A

1. Prouver que $\overrightarrow{AU} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
2. Placer les points T et U sur la figure ci-contre, en codant la construction.
3. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{TU}$, $\overrightarrow{TR}$ et $\overrightarrow{TS}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
4. Calculer $9\overrightarrow{TU} + 6\overrightarrow{TS}$.
5. Que peut-on en déduire pour les points T , U , R et S ?
6. Les droites (TU) et (AB) sont sécantes en L . Déterminer la valeur du réel x tel que $\overrightarrow{AL} = x\overrightarrow{AB}$.



Partie B

Les points M et N sont définis par $\overrightarrow{DM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BN} = y\overrightarrow{BC}$ avec $y \in \mathbb{R}$. On se place dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Donner les coordonnées des points F , S , M et N dans ce repère.
2. Déterminer, à l'aide des coordonnées, la valeur du réel y telle que les points F , S , M et N soient coplanaires.