

Exercice 1 : Refroidissement de Newton

1. **Conjecture** : Le café est initialement à 80°C et le milieu ambiant à 10°C . Physiquement, le café va refroidir jusqu'à atteindre l'équilibre thermique avec la pièce. On peut donc conjecturer que la suite (T_n) est **décroissante** et que sa **limite est 10**.
2. **Expression de T_{n+1}** : L'énoncé donne la relation : $T_{n+1} - T_n = k(T_n - M)$. Avec $k = -0,2$ et $M = 10$, on obtient :

$$T_{n+1} - T_n = -0,2(T_n - 10) \iff T_{n+1} = T_n - 0,2T_n + 2$$

En simplifiant, on obtient bien :

$$T_{n+1} = 0,8T_n + 2$$

3. Récurrence et variations :

- **Démonstration par récurrence que $T_n \geq 10$** : Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : " $T_n \geq 10$ ".

Initialisation : Pour $n = 0$, $T_0 = 80$. Or $80 \geq 10$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que pour un entier $k \geq 0$, $T_k \geq 10$. Montrons que $T_{k+1} \geq 10$.

$$\begin{aligned} T_k &\geq 10 \\ 0,8T_k &\geq 8 \quad (\text{car } 0,8 > 0) \\ 0,8T_k + 2 &\geq 8 + 2 \\ T_{k+1} &\geq 10 \end{aligned}$$

La propriété est héréditaire.

Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n \geq 10$.

- **Sens de variation** : Étudions le signe de la différence $T_{n+1} - T_n$:

$$T_{n+1} - T_n = -0,2(T_n - 10)$$

Or, nous venons de montrer que $T_n \geq 10$, donc $T_n - 10 \geq 0$.

Par conséquent, $-0,2(T_n - 10) \leq 0$.

On a donc $T_{n+1} \leq T_n$ pour tout n .

La suite (T_n) est décroissante.

4. **Convergence** : La suite (T_n) est décroissante et minorée par 10. D'après le théorème de convergence monotone, **la suite (T_n) est convergente**.
5. **Suite auxiliaire (u_n)** :

(a) On a $u_n = T_n - 10$. Exprimons u_{n+1} en fonction de u_n :

$$u_{n+1} = T_{n+1} - 10 = (0,8T_n + 2) - 10 = 0,8T_n - 8 = 0,8(T_n - 10) = 0,8u_n$$

La suite (u_n) est donc une **suite géométrique** de raison $q = 0,8$. Son premier terme est

$$u_0 = T_0 - 10 = 80 - 10 = 70.$$

- (b) On sait que pour une suite géométrique, $u_n = u_0 \times q^n$. Donc $u_n = 70 \times 0,8^n$. Comme $T_n = u_n + 10$, on en déduit :

$$T_n = 70 \times 0,8^n + 10$$

- (c) **Limite** : Comme $-1 < 0,8 < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$. Par opérations sur les limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 70 \times 0 + 10 = 10$$

Interprétation : À long terme, la température du café va se stabiliser à la température de la pièce (10°C).

6. (*) **Résolution de $T_n \leq 40$** : On cherche le plus petit entier n tel que $70 \times 0,8^n + 10 \leq 40$.

$$70 \times 0,8^n \leq 30 \iff 0,8^n \leq \frac{30}{70} \iff 0,8^n \leq \frac{3}{7}$$

La fonction logarithme népérien étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\ln(0,8^n) \leq \ln\left(\frac{3}{7}\right) \iff n \ln(0,8) \leq \ln\left(\frac{3}{7}\right)$$

Comme $\ln(0,8) < 0$, on change le sens de l'inégalité en divisant :

$$n \geq \frac{\ln(3/7)}{\ln(0,8)} \approx 3,80$$

Le premier entier satisfaisant cette condition est $n = 4$.

Interprétation : La température du café deviendra inférieure ou égale à 40°C au bout de **4 minutes**.

7. (*) **Fonction Python** : On cherche à déterminer le premier rang n pour lequel $T_n \leq 40$.

```

1 def seuil():
2     T = 80                # Temperature initiale
3     n = 0                 # Temps initial
4     while T > 40:         # Tant que la temp est superieure a 40
5         T = 0.8 * T + 2
6         n = n + 1
7     return n
    
```

Exercice 2 : Probabilités et Fraude

1. **Loi de X ($p = 0,05$)** :

- (a) On répète $n = 40$ fois une épreuve de Bernoulli (le contrôle) de manière identique et indépendante. Le succès est "être contrôlé" avec la probabilité $p = 0,05$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès.

Donc, X suit la **loi binomiale** de paramètres $n = 40$ et $p = 0,05$.

$$X \sim \mathcal{B}(40; 0,05)$$

(b) (*) **Calcul de $P(X \leq 2)$:**

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

La formule générale est $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

$$\bullet P(X = 0) = \binom{40}{0} \times 0,05^0 \times 0,95^{40} \approx 0,1285$$

$$\bullet P(X = 1) = \binom{40}{1} \times 0,05^1 \times 0,95^{39} \approx 0,2706$$

$$\bullet P(X = 2) = \binom{40}{2} \times 0,05^2 \times 0,95^{38} \approx 0,2777$$

$$P(X \leq 2) \approx 0,1285 + 0,2706 + 0,2777 \approx 0,6768. \text{ Arrondi au millième : } \boxed{P(X \leq 2) \approx 0,677}.$$

(c) **Calcul de $P(X \geq 1)$:** On utilise l'événement contraire "ne jamais être contrôlé" ($X = 0$).

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,95^{40} \approx 1 - 0,1285$$

$$\text{Arrondi au millième : } \boxed{P(X \geq 1) \approx 0,872}.$$

2. Variable aléatoire Z (Gain) :

(a) Théo ne paie jamais son billet de 10 €. Sur 40 trajets, il économise donc $40 \times 10 = 400$ €. Cependant, à chaque contrôle (il y en a X), il doit payer.

Note d'interprétation : L'énoncé indique $Z = 400 - 110X$. Cela signifie que le coût d'un contrôle s'élève à 110 €. Ceci correspond logiquement au paiement de l'amende (100 €) cumulé à la régularisation du billet non payé (10 €).

Le gain est donc : Gain brut - Coût des amendes.

$$Z = 400 - 110X$$

(b) **Espérance de Z :** Par linéarité de l'espérance : $E(Z) = 400 - 110E(X)$. Pour une loi binomiale, $E(X) = n \times p = 40 \times 0,05 = 2$.

$$E(Z) = 400 - 110(2) = 400 - 220 = 180$$

$$\boxed{E(Z) = 180}$$

3. Analyse de la stratégie :

(a) Comme $E(Z) = 180 > 0$, cela signifie qu'en moyenne, sur 40 trajets, Théo "gagne" (économise) 180 euros malgré les amendes. **La fraude systématique est donc favorable à Théo.**

(b) (*) **Seuil de rentabilité pour p :** La fraude n'est plus favorable si l'espérance du gain devient négative ou nulle ($E(Z) \leq 0$). On reprend l'expression de $E(Z)$ en gardant p inconnu. $E(X) = 40p$.

$$E(Z) = 400 - 110(40p) = 400 - 4400p$$

On résout l'inéquation :

$$400 - 4400p < 0 \iff 400 < 4400p \iff p > \frac{400}{4400} \iff p > \frac{1}{11}$$

On a $\frac{1}{11} \approx 0,0909$.

Pour que la fraude ne soit plus rentable, il faut augmenter la probabilité de contrôle. Arrondi au centième supérieur, il faudrait que p **soit supérieur ou égal à 0,10 (ou 0,09 selon l'arrondi strict)**.

Si on arrondit $\frac{1}{11}$ au centième le plus proche (0,09) : $400 - 4400 \times 0,09 = 400 - 396 = 4 > 0$. C'est encore favorable. Donc il faut $p \geq 0,10$.

Réponse : À partir de $p = 0,10$.