

L'usage de la calculatrice est autorisé, à condition que le mode Examen soit activé.

Les élèves **bénéficiant d'un tiers-temps** ne traiteront pas les questions marquées d'une étoile (*).

Exercice 1 (10 points)

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

Une tasse de café est servie à une température initiale de 80°C dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius et supposée constante, est notée M .

Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton à une suite modélisant l'évolution de la température du café au cours du temps.

On note T_n la température du café à l'instant n , avec T_n exprimé en degré Celsius et n en minute. On a ainsi $T_0 = 80$.

On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n + 1$ par l'égalité :

$$T_{n+1} - T_n = k(T_n - M)$$

où k est une constante réelle. Dans toute la suite, on choisit $M = 10$ et $k = -0,2$.

1. D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variations et l'éventuelle limite de la suite (T_n) ?
2. Montrer que, pour tout entier naturel n , $T_{n+1} = 0,8T_n + 2$.
3. Montrer par récurrence que $T_n \geq 10$ pour tout entier n puis en déduire le sens de variation de (T_n) .
4. La suite (T_n) est-elle convergente ? Justifier.
5. On pose, pour tout entier naturel n , $u_n = T_n - 10$.
 - (a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0 .
 - (b) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $T_n = 70 \times 0,8^n + 10$.
 - (c) Déterminer la limite de la suite (T_n) . Que signifie ce résultat ?
6. (*) À l'aide du tableur de la calculatrice, résoudre l'inéquation $T_n \leq 40$ et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
7. (*) Écrire une fonction (que l'on appellera `seuil`) en langage Python qui permette de répondre au problème posé à la question précédente.

Exercice 2 (10 points)

Une compagnie de transports désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes. Cette compagnie effectue une étude basée sur 2 trajets par jour pendant les 20 jours ouvrables d'un mois, soit au total 40 trajets.

On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p .

Un trajet coûte 10 euros ; en cas de fraude, l'amende est de 100 euros. Théo fraude systématiquement lors des 40 trajets étudiés.

1. On suppose que $p = 0,05$. Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de trajets où Théo a été contrôlé.
 - (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
 - (b) (*) Calculer la probabilité, arrondie au millième, que Théo soit contrôlé au plus deux fois.
 - (c) Calculer la probabilité, arrondie au millième, que Théo soit contrôlé au moins une fois.
2. Soit Z la variable aléatoire donnant le gain algébrique réalisé par Théo sur l'ensemble des 40 trajets.
 - (a) Justifier l'égalité $Z = 400 - 110X$.
 - (b) En admettant que $E(Z) = 400 - 110E(X)$, calculer $E(Z)$.
3.
 - (a) La fraude systématique est-elle favorable à Théo lorsque $p = 0,05$?
 - (b) (*) À partir de quelle valeur de p (arrondie au centième) en serait-il autrement ?