

Exercice 1 : QCM

1. **Réponse D.** $u_n = 5 \times (-1)^n$. Les termes valent alternativement 5 et -5 . La suite ne converge pas vers une valeur unique. Elle n'a pas de limite.

2. **Réponse C.** $v_n = n - 5n^2 = n^2(\frac{1}{n} - 5)$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{n} - 5) = -5$.

Par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

3. **Réponse A.** $w_n = n - 5 \sin(n)$. On sait que $-1 \leq \sin(n) \leq 1$, donc $-5 \leq -5 \sin(n) \leq 5$.

On en déduit : $n - 5 \leq w_n \leq n + 5$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 5) = +\infty$, par le théorème de comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$.

4. **Réponses C et D.** La propriété est $n^3 > 3n \iff n(n^2 - 3) > 0$.

• Pour $n = 2$: $2^3 = 8$ et $3 \times 2 = 6$. On a bien $8 > 6$. La réponse **C est vraie**.

• Pour tout $n \geq 2$: On a $n^2 \geq 4$, donc $n^2 - 3 \geq 1 > 0$. Comme n est positif, le produit $n(n^2 - 3)$ est strictement positif. La réponse **D est vraie**.

5. **Réponses A et C.** Soit $f(x) = \frac{3x+2}{x+1}$ sur $[0; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{3(x+1) - 1(3x+2)}{(x+1)^2} = \frac{3x+3-3x-2}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0.$$

La fonction est strictement croissante, donc la suite (u_n) est **croissante**.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$. Comme f est croissante, pour tout $x \geq 0$, $f(x) < 3$. La suite est donc **majorée par 3**.

(Elle est minorée par $u_0 = 2$, donc "Minorée par 3" est faux).

6. **Réponse B.** On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+1}{n^2+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

7. **Réponse B.** (b_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$.

Comme $-1 < q < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$.

8. **Réponse C.** $c_n = 5^n - 7^n = 7^n \left[\left(\frac{5}{7} \right)^n - 1 \right]$.

Comme $0 < \frac{5}{7} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{7} \right)^n = 0$.

Par somme le terme entre crochets tend vers -1 , et 7^n vers $+\infty$.

Par produit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = -\infty$.

Exercice 2 : Calculs de limites

$$1. u_n = \frac{5n^2 - 3n}{n^2 + 1} = \frac{n^2(5 - \frac{3}{n})}{n^2(1 + \frac{1}{n^2})} = \frac{5 - \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

Donc, par quotient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$.

2. $v_n = \frac{(-1)^n + 8}{\sqrt{n}}$.

On sait que $-1 \leq (-1)^n \leq 1$.

Donc $7 \leq (-1)^n + 8 \leq 9$.

En divisant par $\sqrt{n}$ (pour $n > 0$) : $\frac{7}{\sqrt{n}} \leq v_n \leq \frac{9}{\sqrt{n}}$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9}{\sqrt{n}} = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

3. $w_n = e^n + n^2 + 1$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 1) = +\infty$.

Par somme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$.

4. $t_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n+4}$. Forme indéterminée " $\infty - \infty$ ".

Utilisons l'expression conjuguée :

$$t_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+4})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+4})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+4}} = \frac{(n+1) - (n+4)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+4}} = \frac{-3}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+4}}.$$

Le dénominateur tend vers $+\infty$, donc par quotient $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$.

5. s_n est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme 5 et de raison $q = \frac{1}{4}$.

Il y a $n+1$ termes (de la puissance 0 à la puissance n).

$$s_n = 5 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = 5 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} = 5 \times \frac{4}{3} \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) = \frac{20}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right).$$

Comme $-1 < \frac{1}{4} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \frac{20}{3}$.

Exercice 3 : Étude de suite et algorithme

$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. $u_1 = 3u_0 - 2(0) + 3 = 3(0) + 3 = 3$.

$u_2 = 3u_1 - 2(1) + 3 = 3(3) - 2 + 3 = 9 - 2 + 3 = 10$.

2. **Démonstration par récurrence** : Soit $P(n)$ la propriété : $u_n \geq n$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 0$ et $n = 0$. On a bien $0 \geq 0$. $P(0)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que pour un entier $k \geq 0$, $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire $u_k \geq k$.

Montrons que $P(k+1)$ est vraie, soit $u_{k+1} \geq k+1$.

$$u_{k+1} = 3u_k - 2k + 3.$$

Par hypothèse de récurrence, $u_k \geq k \implies 3u_k \geq 3k$.

$$\text{Donc } u_{k+1} \geq 3k - 2k + 3 = k + 3.$$

$$\text{Or } k + 3 = (k + 1) + 2 \geq k + 1.$$

Donc $u_{k+1} \geq k + 1$. L'hérédité est vérifiée.

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n \geq n}$.

3. Étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$$u_{n+1} - u_n = (3u_n - 2n + 3) - u_n = 2u_n - 2n + 3 = 2(u_n - n) + 3.$$

D'après la question précédente, $u_n \geq n \iff u_n - n \geq 0$.

$$\text{Donc } 2(u_n - n) \geq 0, \text{ et } 2(u_n - n) + 3 \geq 3 > 0.$$

Puisque $u_{n+1} - u_n > 0$, la suite (u_n) est **strictement croissante**.

4. On a $u_n \geq n$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$.

D'après le théorème de comparaison, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}$.

5. Algorithme Python :

```
1 def seuil():
2     n = 0
3     u = 0
4     while u < 20000:
5         u = 3*u - 2*n + 3
6         n = n + 1
7     return n
```

6. Soit $v_n = u_n - n + 1$.

(a) Exprimons v_{n+1} en fonction de v_n .

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n + 1) + 1 = u_{n+1} - n.$$

Remplaçons u_{n+1} :

$$v_{n+1} = (3u_n - 2n + 3) - n = 3u_n - 3n + 3 = 3(u_n - n + 1).$$

On reconnaît l'expression de v_n .

$$v_{n+1} = 3v_n.$$

La suite (v_n) est donc **géométrique** de raison $q = 3$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 + 1 = 1$.

(b) Expression explicite :

$$v_n = v_0 \times q^n = 1 \times 3^n = 3^n.$$

Comme $v_n = u_n - n + 1$, on a $u_n = v_n + n - 1$.

$$\text{Soit } \boxed{u_n = 3^n + n - 1}.$$

(c) Calcul de la somme S_n .

On utilise la propriété de linéarité de la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (3^k + k - 1) = \sum_{k=0}^n 3^k + \sum_{k=0}^n k - \sum_{k=0}^n 1$$

Calculons chaque partie séparément :

- Somme géométrique : $\sum_{k=0}^n 3^k = \frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$.
- Somme arithmétique : $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.
- Somme constante : $\sum_{k=0}^n 1 = (n+1) \times 1 = n+1$.

En regroupant les termes :

$$S_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2} + \frac{n^2 + n}{2} - \frac{2(n+1)}{2} = \frac{3^{n+1} - 1 + n^2 + n - 2n - 2}{2}$$

$$S_n = \frac{3^{n+1} + n^2 - n - 3}{2}$$

BONUS

On a pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^n k a_k = \frac{2n+2}{n+2}$.

Notons $T_n = \sum_{k=1}^n k a_k$. Alors $T_n = \frac{2n+2}{n+2}$.

Pour $n \geq 2$, on a $n a_n = T_n - T_{n-1}$.

$$n a_n = \frac{2n+2}{n+2} - \frac{2(n-1)+2}{(n-1)+2} = \frac{2n+2}{n+2} - \frac{2n}{n+1}$$

$$n a_n = \frac{2(n+1)^2 - 2n(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{2(n^2 + 2n + 1) - 2n^2 - 4n}{(n+2)(n+1)} = \frac{2}{(n+2)(n+1)}$$

Donc pour $n \geq 2$, $a_n = \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$.

Vérifions pour $n = 1$. La formule donnée est $1 \cdot a_1 = \frac{2(1)+2}{1+2} = \frac{4}{3}$.

La formule dérivée donnerait $\frac{2}{1(2)(3)} = \frac{1}{3}$. Il y a donc une différence pour le premier terme.

On a $a_1 = \frac{4}{3}$.

Pour $n \geq 2$, utilisons la décomposition en éléments simples :

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

Cherchons la somme $S_N = \sum_{k=1}^N a_k = a_1 + \sum_{k=2}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right)$.

C'est une somme télescopique.

$$\sum_{k=2}^N \left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \right]$$

Posons $x_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. La somme est : $\sum_{k=2}^N (x_k - x_{k+1}) = x_2 - x_{N+1}$.

$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad x_{N+1} = \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2}$$

Quand $N \rightarrow +\infty$, $x_{N+1} \rightarrow 0$.

Donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^N a_k = \frac{1}{6}$.

La limite totale est $a_1 + \frac{1}{6} = \frac{4}{3} + \frac{1}{6} = \frac{8}{6} + \frac{1}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$.

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k = \frac{3}{2}}$$