

Exercice 1

1. (*) Affirmation 1 : FAUSSE

Il suffit de donner un contre-exemple.

Considérons la suite constante définie par $u_n = -20\,000\,000$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a bien $u_n < -15\,000\,000$ pour tout $n \geq 35$.

Cependant, la suite est constante, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -20\,000\,000 \neq -\infty$.

2. Affirmation 2 : FAUSSE

Il s'agit d'une forme indéterminée du type « $\infty \times 0$ ».

La limite du produit n'est pas nécessairement $+\infty$.

Prenons comme contre-exemple : $u_n = n$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$ pour $n \geq 1$.

On a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ (avec $v_n > 0$).

Or, $u_n v_n = n \times \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 0 \neq +\infty.$$

3. Affirmation 3 : FAUSSE

On a $p_n = n^2 - 42 + 4 = n^2 - 38$.

Considérons la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 38$. Sa dérivée est $f'(x) = 2x$.

Pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$, donc la fonction f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

La suite (p_n) est donc **strictement croissante** pour $n \in \mathbb{N}$.

4. Affirmation 4 : VRAIE

Soit $n \in \mathbb{N}$, donc $n \geq 0$.

En multipliant par -3 (qui est négatif), on change le sens de l'inégalité : $-3n \leq 0$.

En ajoutant 4 de chaque côté : $-3n + 4 \leq 4$.

D'où $w_n \leq 4$. La suite est bien majorée par 4.

Exercice 2

1. (*) Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - 3^n$.

Initialisation : Pour $n = 0$. D'une part, $u_0 = 0$ (donné dans l'énoncé). D'autre part, $1 - 3^0 = 1 - 1 = 0$. L'égalité est vérifiée au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons que pour un entier $k \in \mathbb{N}$ fixé, on ait $u_k = 1 - 3^k$. Montrons que la propriété est vraie au rang $k + 1$, c'est-à-dire $u_{k+1} = 1 - 3^{k+1}$.

Par définition, $u_{k+1} = 3u_k - 2$. En utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$u_{k+1} = 3(1 - 3^k) - 2$$

$$u_{k+1} = 3 - 3 \times 3^k - 2$$

$$u_{k+1} = 3 - 3^{k+1} - 2$$

$$u_{k+1} = 1 - 3^{k+1}$$

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n = 1 - 3^n}$.

2. Calcul des limites.

$$(a) \quad u_n = \frac{3 - \frac{1}{n^2}}{n + 1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{1}{n^2} \right) = 3 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 1) = +\infty \end{array} \right\} \text{Par quotient, } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}.$$

$$(b) \quad v_n = 3n^2 - 8n + 1$$

Nous sommes en présence d'une forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ». Factorisons par le terme de plus haut degré (n^2) :

$$v_n = n^2 \left(3 - \frac{8}{n} + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{8}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = 3 \end{array} \right\} \text{Par produit, } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty}.$$

$$(c) \quad (*) \quad t_n = \left(n^2 - \frac{3}{n^2} \right) (6 - n)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n^2 - \frac{3}{n^2} \right) = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (6 - n) = -\infty \end{array} \right\} \text{Par produit, } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = -\infty}.$$

Exercice 3

1. À l'aide du tableur, on obtient :

$$u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 \approx 0,667 \left(\frac{2}{3} \right) \quad ; \quad u_2 = 0,5 \quad ; \quad u_3 \approx 0,455 \left(\frac{5}{11} \right)$$

On constate que $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$. **Conjecture :** La suite (u_n) semble strictement décroissante.

2. Soit $f(x) = \frac{3-x}{8-5x}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1,6\}$.

f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 3 - x$ et $v(x) = 8 - 5x$. On a $u'(x) = -1$ et $v'(x) = -5$.

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{-1(8 - 5x) - (3 - x)(-5)}{(8 - 5x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-8 + 5x - (-15 + 5x)}{(8 - 5x)^2} = \frac{-8 + 5x + 15 - 5x}{(8 - 5x)^2} = \frac{7}{(8 - 5x)^2}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 6\}$, $(8 - 5x)^2 > 0$ et $7 > 0$. Donc $f'(x) > 0$. La fonction f est **strictement croissante** sur chacun des intervalles de son domaine de définition, en particulier sur $[0; 1]$ (car $1, 6 \notin [0; 1]$).

x	0	1
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$f(0) = \frac{3}{8}$	$f(1) = \frac{2}{3}$

3. Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.

Initialisation : Pour $n = 0$. $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{3-1}{8-5} = \frac{2}{3}$. On a bien $0 \leq \frac{2}{3} \leq 1 \leq 1$.

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons que pour un rang k , $0 \leq u_{k+1} \leq u_k \leq 1$. Comme la fonction f est strictement croissante sur $[0; 1]$ (d'après la question 2), elle conserve l'ordre. Appliquons f aux membres de l'inégalité :

$$f(0) \leq f(u_{k+1}) \leq f(u_k) \leq f(1)$$

Or :

- $f(0) = \frac{3}{8} = 0,375 \geq 0$.
- $f(u_{k+1}) = u_{k+2}$.
- $f(u_k) = u_{k+1}$.
- $f(1) = \frac{2}{3} \leq 1$.

On obtient donc : $0 \leq \frac{3}{8} \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq \frac{2}{3} \leq 1$. Ce qui implique $0 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 1$.

La propriété est héréditaire.

Conclusion : Pour tout entier naturel n , $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.

Dédution : Nous venons de démontrer que la suite (u_n) est :

- Décroissante (car $u_{n+1} \leq u_n$).
- Minorée par 0 (car $u_n \geq 0$).

D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers une limite finie : $0 \leq \ell \leq 1$.