

Correction de l'Exercice 1 : Étude d'une fonction

On a $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 63$.

1. **Calcul de la dérivée :** f est une fonction polynôme, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 + 3 \times 2x + 3 = 3x^2 + 6x + 3.$$

On peut factoriser par 3 :

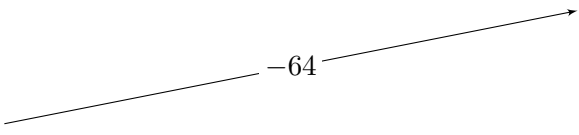
$$f'(x) = 3(x^2 + 2x + 1).$$

On reconnaît une identité remarquable :

$$f'(x) = 3(x + 1)^2$$

2. **Étude des variations :** Pour tout réel x , $(x + 1)^2 \geq 0$, donc $f'(x) \geq 0$. $f'(x)$ s'annule uniquement pour $x = -1$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Calculons l'image de -1 (bien que non nécessaire pour le signe, utile pour placer le point d'inflexion) : $f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 3(-1) - 63 = -1 + 3 - 3 - 63 = -64$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$			

3. **Tangente parallèle à $y = 3x - 100$:** Le coefficient directeur de la droite est $m = 3$. On cherche les points d'abscisse x tels que le nombre dérivé $f'(x)$ soit égal à 3.

$$\begin{aligned}
 f'(x) = 3 &\iff 3(x + 1)^2 = 3 \\
 &\iff (x + 1)^2 = 1 \\
 &\iff x + 1 = 1 \quad \text{ou} \quad x + 1 = -1 \\
 &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -2
 \end{aligned}$$

Il y a deux points solutions. Calculons leurs ordonnées :

- Pour $x = 0$: $f(0) = -63$. Point $A(0; -63)$.
- Pour $x = -2$: $f(-2) = (-8) + 12 - 6 - 63 = -65$. Point $B(-2; -65)$.

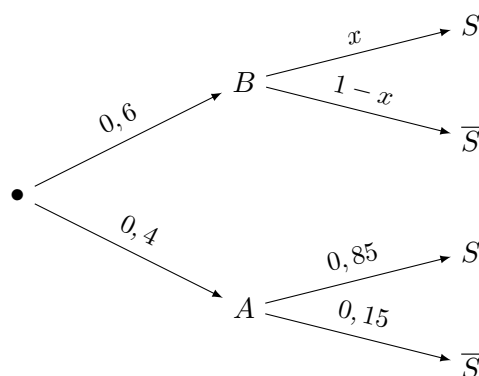
Les points cherchés sont $A(0; -63)$ et $B(-2; -65)$.

Correction de l'Exercice 2 : Probabilités

Données de l'énoncé :

- $P(A) = 0,4$ donc $P(B) = 1 - 0,4 = 0,6$.
- $P(S) = 0,91$.
- $P_A(S) = 0,85$.
- On pose $P_B(S) = x$.

1. Arbre pondéré complet :



2. Probabilité de $A \cap S$:

$$P(A \cap S) = P(A) \times P_A(S) = 0,4 \times 0,85 = 0,34$$

$$\boxed{P(A \cap S) = 0,34}$$

3. Détermination de x : D'après la formule des probabilités totales, A et B formant une partition de l'univers :

$$P(S) = P(A \cap S) + P(B \cap S)$$

$$P(S) = 0,34 + P(B) \times P_B(S)$$

$$0,91 = 0,34 + 0,6 \times x$$

On résout l'équation pour trouver x :

$$0,6x = 0,91 - 0,34$$

$$0,6x = 0,57$$

$$x = \frac{0,57}{0,6} = \frac{5,7}{6} = 0,95$$

$$\boxed{P_B(S) = 0,95}$$

4. **Calcul de $P_S(B)$** : On cherche la probabilité qu'il vienne de B sachant qu'il est vendu.

$$P_S(B) = \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = \frac{0,6 \times 0,95}{0,91} = \frac{0,57}{0,91}$$

$$P_S(B) \approx 0,62637...$$

$$P_S(B) \approx 0,626$$

Correction de l'Exercice 3 : Suites numériques

Soit (d_n) la masse moyenne de déchets pour l'année $2018 + n$, avec $d_0 = 400$. La baisse est de 1,5 % par an.

1. **Calcul de d_1** : Diminuer une valeur de 1,5 % revient à la multiplier par $1 - \frac{1,5}{100} = 0,985$.

$$d_1 = d_0 \times 0,985 = 400 \times 0,985 = 394.$$

$$d_1 = 394$$

Interprétation : En 2019, la masse moyenne de déchets ménagers par habitant est de 394 kg.

2. **Nature de la suite** : On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même coefficient $q = 0,985$.

(d_n) est une suite géométrique de premier terme $d_0 = 400$ et de raison $q = 0,985$.

3. **Expression de d_n et valeur en 2022** : Pour une suite géométrique, $d_n = d_0 \times q^n$.

$$d_n = 400 \times 0,985^n.$$

L'année 2022 correspond à $n = 2022 - 2018 = 4$.

$$d_4 = 400 \times 0,985^4 \approx 376,47$$

En 2022, la masse moyenne est d'environ 376 kg.

4. **Seuil de 365 kg** : On cherche le plus petit entier naturel n tel que $d_n < 365$.

Comme la fonction logarithme népérien n'est pas encore connue, on utilise la calculatrice pour générer un tableau de valeurs de la suite définie par $d_n = 400 \times 0,985^n$.

On observe les valeurs suivantes :

- Pour $n = 6$: $d_6 = 400 \times 0,985^6 \approx 365,27$. On a $d_6 > 365$.
- Pour $n = 7$: $d_7 = 400 \times 0,985^7 \approx 359,79$. On a $d_7 < 365$.

Le plus petit entier naturel n validant la condition est donc $n = 7$. L'année correspondante est $2018 + 7 = 2025$.

La masse moyenne deviendra inférieure à 365 kg en 2025.

Bonus

Voici une fonction Python répondant au problème :

```
def annee_seuil():  
    u = 400  
    n = 0  
    while u >= 365:  
        u = u * 0.985  
        n = n + 1  
    return 2018 + n
```