

Correction de l'Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = z^2 + 2z + 9$.

1. Calcul de l'image de $-1 + i\sqrt{3}$.

Posons $z_0 = -1 + i\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} f(z_0) &= (-1 + i\sqrt{3})^2 + 2(-1 + i\sqrt{3}) + 9 \\ &= \left((-1)^2 + 2(-1)(i\sqrt{3}) + (i\sqrt{3})^2\right) - 2 + 2i\sqrt{3} + 9 \\ &= (1 - 2i\sqrt{3} - 3) - 2 + 2i\sqrt{3} + 9 \\ &= -2 - 2i\sqrt{3} - 2 + 2i\sqrt{3} + 9 \\ &= -4 + 9 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\boxed{f(-1 + i\sqrt{3}) = 5}$$

2. Résolution de l'équation $f(z) = 5$.

$$\begin{aligned} f(z) = 5 &\iff z^2 + 2z + 9 = 5 \\ &\iff z^2 + 2z + 4 = 0 \end{aligned}$$

Calculons le discriminant Δ :

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 4 = 4 - 16 = -12$$

Comme $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées. On a $\Delta = (2i\sqrt{3})^2$. Les solutions sont :

$$z_1 = \frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{2} = -1 - i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3}$$

$$\boxed{S = \{-1 - i\sqrt{3}; -1 + i\sqrt{3}\}}$$

Remarque : On retrouve bien la solution de la question 1.

3. Valeurs de λ pour deux solutions conjuguées.

L'équation $f(z) = \lambda$ s'écrit $z^2 + 2z + 9 - \lambda = 0$. C'est une équation du second degré à coefficients réels ($a = 1, b = 2, c = 9 - \lambda$). Pour qu'elle admette deux solutions complexes conjuguées (sous-entendu non réelles), le discriminant doit être strictement négatif.

$$\Delta = 2^2 - 4(1)(9 - \lambda) = 4 - 36 + 4\lambda = 4\lambda - 32$$

$$\begin{aligned}\Delta < 0 &\iff 4\lambda - 32 < 0 \\ &\iff 4\lambda < 32 \\ &\iff \lambda < 8\end{aligned}$$

L'ensemble des valeurs cherchées est l'intervalle $] -\infty ; 8[$.

4. Soit $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) **Forme algébrique de $f(z)$.**

$$\begin{aligned}f(z) &= (x + iy)^2 + 2(x + iy) + 9 \\ &= (x^2 - y^2 + 2ixy) + 2x + 2iy + 9 \\ &= (x^2 - y^2 + 2x + 9) + i(2xy + 2y)\end{aligned}$$

On identifie bien la partie réelle et la partie imaginaire :

$$f(z) = \underbrace{x^2 - y^2 + 2x + 9}_{\text{Re}(f(z))} + i \underbrace{(2xy + 2y)}_{\text{Im}(f(z))}$$

(b) **Ensemble des complexes tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.**

$f(z)$ est un réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle :

$$\begin{aligned}\text{Im}(f(z)) = 0 &\iff 2xy + 2y = 0 \\ &\iff 2y(x + 1) = 0 \\ &\iff y = 0 \quad \text{ou} \quad x = -1\end{aligned}$$

L'ensemble des points $M(z)$ solutions est donc constitué de la réunion de deux droites :

- La droite d'équation $y = 0$ (l'axe des réels).
- La droite d'équation $x = -1$ (droite verticale passant par le point d'affixe -1).

Correction de l'Exercice 2

1. **Résolution de $Z^2 + 4Z + 16 = 0$.**

Calcul du discriminant :

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 16 = 16 - 64 = -48$$

On a $\Delta = -48 = (i\sqrt{48})^2 = (i\sqrt{16 \times 3})^2 = (4i\sqrt{3})^2$. Les solutions sont :

$$Z_1 = \frac{-4 - 4i\sqrt{3}}{2} = -2 - 2i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{-4 + 4i\sqrt{3}}{2} = -2 + 2i\sqrt{3}$$

$$S = \{-2 - 2i\sqrt{3}; -2 + 2i\sqrt{3}\}$$

2. On pose $a = 1 + i\sqrt{3}$.

(a) **Calcul de a^2 .**

$$a^2 = (1 + i\sqrt{3})^2 = 1 + 2i\sqrt{3} + (i\sqrt{3})^2 = 1 + 2i\sqrt{3} - 3 = -2 + 2i\sqrt{3}$$

$$a^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$$

(b) **Résolution de $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$.**

D'après la question précédente, on sait que $a^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$. L'équation devient alors :

$$\begin{aligned} z^2 &= a^2 \iff z^2 - a^2 = 0 \\ &\iff (z - a)(z + a) = 0 \\ &\iff z = a \quad \text{ou} \quad z = -a \end{aligned}$$

Les solutions sont donc :

$$z_A = 1 + i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_B = -1 - i\sqrt{3}$$

$$S = \{1 + i\sqrt{3}; -1 - i\sqrt{3}\}$$

3. (a) **Démonstration sur le conjugué.**

Soit z une solution de $(E) : z^4 + 4z^2 + 16 = 0$. Prenons le conjugué de cette égalité :

$$\overline{z^4 + 4z^2 + 16} = \overline{0}$$

En utilisant les propriétés du conjugué ($\overline{u + v} = \bar{u} + \bar{v}$, $\overline{u^n} = (\bar{u})^n$ et $\bar{\bar{k}} = k$ pour $k \in \mathbb{R}$) :

$$(\bar{z})^4 + 4(\bar{z})^2 + 16 = 0$$

Ce qui signifie exactement que $\bar{z}$ vérifie l'équation (E) .

Si z est solution, alors $\bar{z}$ est aussi solution.

(b) **Solutions de (E) .**

L'équation (E) est une équation bicarrée. Posons $Z = z^2$. L'équation devient $Z^2 + 4Z + 16 = 0$. D'après la question 1, les solutions pour Z sont $Z_1 = -2 - 2i\sqrt{3}$ et $Z_2 = -2 + 2i\sqrt{3}$.

Il faut donc résoudre deux équations :

• $z^2 = Z_2 = -2 + 2i\sqrt{3}$. D'après la question 2.b, les solutions sont a et $-a$:

$$s_1 = 1 + i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad s_2 = -1 - i\sqrt{3}$$

- $z^2 = Z_1 = -2 - 2i\sqrt{3}$. Remarquons que $Z_1 = \overline{Z_2}$. D'après la question 3.a, les solutions de $z^2 = Z_1$ sont les conjuguées des solutions de $z^2 = Z_2$.

$$s_3 = \overline{s_1} = 1 - i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad s_4 = \overline{s_2} = -1 + i\sqrt{3}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S = \left\{ 1 + i\sqrt{3}; -1 - i\sqrt{3}; 1 - i\sqrt{3}; -1 + i\sqrt{3} \right\}$$